

第 3 章

2 次関数

- ① c を実数とし、 x の 2 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^2 - 2cx + 6 - c$$

とする。

- (1) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点は

$$\left(c, \boxed{\text{ア}}c^2 - c + \boxed{\text{イ}}\right)$$

である。 $f(1) \leq f(3)$ であるような c の値の範囲は

$$c \leq \boxed{\text{ウ}}$$

である。

- (2) $1 \leq x \leq 3$ における 2 次関数 $f(x)$ の最大値を M とおく。 $-5 < M < 36$ であるような c の値の範囲は

$$-\boxed{\text{エ}} < c < \boxed{\text{オ}}$$

である。

- 2 a と b はいずれも 0 でない実数とする。 x の方程式

$$bx^2 + 2(2a - b)x + b - 4a + 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

を考える。

- (1) 方程式 ① が異なる二つの実数解をもつのは

$$b < \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} a^2$$

のときである。このとき、二つの実数解は

$$x = \frac{b - \boxed{\text{ウ}} a \pm \sqrt{\boxed{\text{ア}} a^2 - \boxed{\text{イ}} b}}{b}$$

である。

- (2) $b = a^2$ とする。方程式 ① が異なる二つの実数解をもち、それらの一方が正の解で他方が負の解であるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{エ}} < a < \boxed{\text{オ}}$$

である。また、方程式 ① が異なる二つの実数解をもち、それらがいずれも正の解であるような a の値の範囲は

$$a < \boxed{\text{カ}}, \quad a > \boxed{\text{キ}}$$

である。

- 3 a と b はともに正の実数とする。 x の 2 次関数

$$y = x^2 + (2a - b)x + a^2 + 1$$

のグラフを G とする。

- (1) グラフ G の頂点の座標は

$$\left(\frac{b}{\boxed{\text{ア}}} - a, -\frac{b^2}{\boxed{\text{イ}}} + ab + \boxed{\text{ウ}} \right)$$

である。

- (2) グラフ G が x 軸と共有点をもつとき、 b のとり得る値の範囲は

$$b \geq \boxed{\text{エ}}a + \boxed{\text{オ}}\sqrt{a^2 + \boxed{\text{カ}}}$$

である。

- (3) グラフ G が x 軸に接し、かつ $a = \sqrt{3}$ のとき

$$b = \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

であり、グラフ G と x 軸との接点の x 座標は $\boxed{\text{コ}}$ である。このとき、 $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ において、 y の最大値は $\boxed{\text{サ}}$ であり、 y の最小値は

$$\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

- (4) グラフ G が点 $(-1, 6)$ を通るとき、 b のとり得る値の最大値は $\boxed{\text{ソ}}$ であり、そのときの a の値は $\boxed{\text{タ}}$ である。

$b = \boxed{\text{ソ}}$, $a = \boxed{\text{タ}}$ のとき、グラフ G は 2 次関数 $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{チ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{テト}}$ だけ平行移動したものである。
 $\boxed{\text{ツ}}$ $\boxed{\text{ナ}}$

4 a を正の実数とし

$$f(x) = ax^2 - 2(a+3)x - 3a + 21$$

とする。2次関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点の x 座標を p とおくと

$$p = \boxed{\text{ア}} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{a}$$

である。

(1) $0 \leq x \leq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が $f(4)$ となるような a の値の範囲は

$$0 < a \leq \boxed{\text{ウ}}$$

である。

また、 $0 \leq x \leq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が $f(p)$ となるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{エ}} \leq a$$

である。

したがって、 $0 \leq x \leq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が 1 であるのは

$$a = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \text{または} \quad a = \frac{\boxed{\text{キ}} + \sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

のときである。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるのは

$$0 < a < \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \quad \text{または} \quad \boxed{\text{ス}} < a$$

のときである。この二つの交点の間の距離を L とする。 $2 < L < 4$ となるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} < a < \frac{\boxed{\text{タ}} - \sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}, \quad \frac{\boxed{\text{ト}} + \sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} < a$$

である。

5 座標平面上にある点 P は、点 A(-8, 8) から出発して、直線 $y = -x$ 上を x 座標が 1 秒あたり 2 増加するように一定の速さで動く。また、同じ座標平面上にある点 Q は、点 P が A を出発すると同時に原点 O から出発して、直線 $y = 10x$ 上を x 座標が 1 秒あたり 1 増加するように一定の速さで動く。出発してから t 秒後の 2 点 P, Q を考える。点 P が O に到達するのは $t = \boxed{\text{ア}}$ のときである。以下、 $0 < t < \boxed{\text{ア}}$ で考える。

- (1) 点 P と x 座標が等しい x 軸上の点を P' 、点 Q と x 座標が等しい x 軸上の点を Q' とおく。三角形 OPP' と三角形 OQQ' の面積の和 S を t で表せば

$$S = \boxed{\text{イ}} t^2 - \boxed{\text{ウエ}} t + \boxed{\text{オカ}}$$

となる。これより $0 < t < \boxed{\text{ア}}$ においては、 $t = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で S は最小値 $\frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ をとる。

次に、 a を $0 < a < \boxed{\text{ア}} - 1$ を満たす定数とする。以下、 $a \leq t \leq a + 1$ における S の最小・最大について考える。

(i) S が $t = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で最小となるような a の値の範囲は $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \leq a \leq \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(ii) S が $t = a$ で最大となるような a の値の範囲は $0 < a \leq \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

- (2) 3 点 O, P, Q を通る 2 次関数のグラフが関数 $y = 2x^2$ のグラフを平行移動したものになるのは、 $t = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ のときであり、 x 軸方向に $\frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ 、 y 軸方向に $\frac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ だけ平行移動すればよい。

- 6 a, b, c を定数とし, $a \neq 0, b \neq 0$ とする。 x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \quad \dots \textcircled{1}$$

のグラフを G とする。 G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸をもつとき

$$a = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。さらに, G が点 $(1, 2b - 1)$ を通るとき

$$c = b - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。以下, ②, ③ のとき, 2 次関数 ① とそのグラフ G を考える。

- (1) G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$b < \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \quad \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} < b$$

である。さらに, G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} < b < \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

- (2) $b > 0$ とする。 $0 \leq x \leq b$ における 2 次関数 ① の最小値が $-\frac{1}{4}$ であるとき, $b = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ で

ある。一方, $x \geq b$ における 2 次関数 ① の最大値が 3 であるとき, $b = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

$b = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$, $b = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときの ① のグラフをそれぞれ G_1, G_2 とする。 G_1 を x 軸方向に $\boxed{\text{テ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{ト}}$ だけ平行移動すれば, G_2 と一致する。

7 a は定数とする。

(1) $f(x) = (x - 3a^2 - 5a)^2 - (3a^2 - 4)^2$ とおく。このとき

$$f(x) = (x - 5a - \boxed{\text{ア}}) (x - \boxed{\text{イ}} a^2 - 5a + \boxed{\text{ウ}})$$

である。したがって、2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが原点を通るのは、 a の値が小さい方から

$$a = -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}, -\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである。

(2) $g(x) = x^2 - 2(3a^2 + 5a)x + 18a^4 + 30a^3 + 49a^2 + 16$ とおく。2 次関数 $y = g(x)$ のグラフの頂点は

$$(\boxed{\text{コ}} a^2 + \boxed{\text{サ}} a, \boxed{\text{シ}} a^4 + \boxed{\text{スセ}} a^2 + \boxed{\text{ソタ}})$$

である。 a が実数全体を動くとき、頂点の x 座標の最小値は $-\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。次に、 $t = a^2$

とおくと、頂点の y 座標は

$$\boxed{\text{シ}} t^2 + \boxed{\text{スセ}} t + \boxed{\text{ソタ}} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。したがって、 a が実数全体を動くとき、頂点の y 座標の最小値は $\boxed{\text{ナニ}}$ である。また、上の式 $\textcircled{1}$ は

$$(\boxed{\text{ヌ}} t + \boxed{\text{ネ}})^2$$

と変形できる。頂点の y 座標が 10000 以下になる a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ノハ}} \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}} \leq a \leq \boxed{\text{フ}} \sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

- 8 a を定数とし、次の2つの関数を考える。

$$f(x) = (1 - 2a)x^2 + 2x - a - 2$$

$$g(x) = (a + 1)x^2 + ax - 1$$

- (1) 関数 $y = g(x)$ のグラフが直線になるのは、 $a =$ アイ のときである。このとき、関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は ウエ と オ
カ である。
- (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが平行移動によって重なるのは、 $a =$ キ のときである。このとき、関数 $y = g(x)$ のグラフは関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に ク、 y 軸方向に ケ だけ平行移動したものになっている。
- (3) 方程式 $f(x) + g(x) = 0$ がただ1つの実数解をもつのは、 a の値が

$$\pm \frac{\sqrt{\frac{\text{コ}}{\text{サシ}}}}{\text{ス}}, \quad \text{セ}$$

のときである。

- (4) 不等式

$$f(x) + g(x) \geq -2ax^2 + 5(a + 2)x + a^2 - 6$$

を満たす x の値の範囲は、

$$a = \text{ソタ} \text{ のとき } 1 \leq x \leq 3 \text{ となり,}$$

$$a = \text{チツ} \text{ のとき } x \leq 1, 3 \leq x \text{ となる。}$$

- 9 a, b, c を定数とし, $a > 0$ とする. x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

のグラフを G とし, グラフ G は x 軸より上側にあるものとする.

- (1) x 軸上に 3 点

$$P_1(2, 0), \quad P_2(4, 0), \quad P_3(6, 0)$$

をとり, グラフ G 上に 3 点 Q_1, Q_2, Q_3 を

点 Q_1 の x 座標は 2, Q_2 の x 座標は 4, Q_3 の x 座標は 6

であるようにとる.

台形 $P_1P_2Q_2Q_1$ の面積を S_1 , 台形 $P_1P_3Q_3Q_1$ の面積を S_2 とするとき,

$$S_1 = 2 \left(\boxed{\text{アイ}} a + \boxed{\text{ウ}} b + c \right),$$

$$S_2 = 4 \left(\boxed{\text{エオ}} a + \boxed{\text{カ}} b + c \right)$$

である.

三角形 $Q_1Q_2Q_3$ の面積が 16 であるとき

$$a = \boxed{\text{キ}}$$

である.

- (2) $a = \boxed{\text{キ}}$ であり, グラフ G が点 $(-2, 2)$ を通るとする. グラフ G が表す放物線の頂点の座標を b を用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}} b, \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}} b^2 + \boxed{\text{セ}} b - \boxed{\text{ソ}} \right)$$

となる. グラフ G が x 軸より上側にあるので, b の値の範囲は

$$\boxed{\text{タ}} < b < \boxed{\text{チツ}}$$

である. さらに, 関数 $y = \boxed{\text{キ}} x^2$ のグラフを x 軸方向に -2 , y 軸方向に k だけ平行移動したグラフを H とする. グラフ H がグラフ G に重なるのは

$$b = \boxed{\text{テ}}, \quad c = \boxed{\text{トナ}}, \quad k = \boxed{\text{ニ}}$$

のときである.

10 a を定数とする。 $f(x) = (x-a)(x-4) + 4$ とおき、 x の2次関数 $y = f(x)$ のグラフを G とする。

(1) グラフ G の頂点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a + \boxed{\text{ウ}}, \quad \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}a^2 + \boxed{\text{キ}}a \right)$$

である。

(2) グラフ G と x 軸が共有点をもつような a の値の範囲は

$$a \leq \boxed{\text{ク}}, \quad \boxed{\text{ケ}} \leq a$$

である。 G と y 軸との交点の y 座標を k とすると、 $\boxed{\text{ケ}} \leq a$ のとき、 k のとり得る値の範囲は $k \geq \boxed{\text{コサ}}$ である。

(3) $a \geq \boxed{\text{ケ}}$ とする。関数 $y = f(x)$ の最小値が -12 であるのは、 $a = \boxed{\text{シス}}$ のときである。

このとき、グラフ G と x 軸との交点の x 座標は $\boxed{\text{セ}} \pm \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。

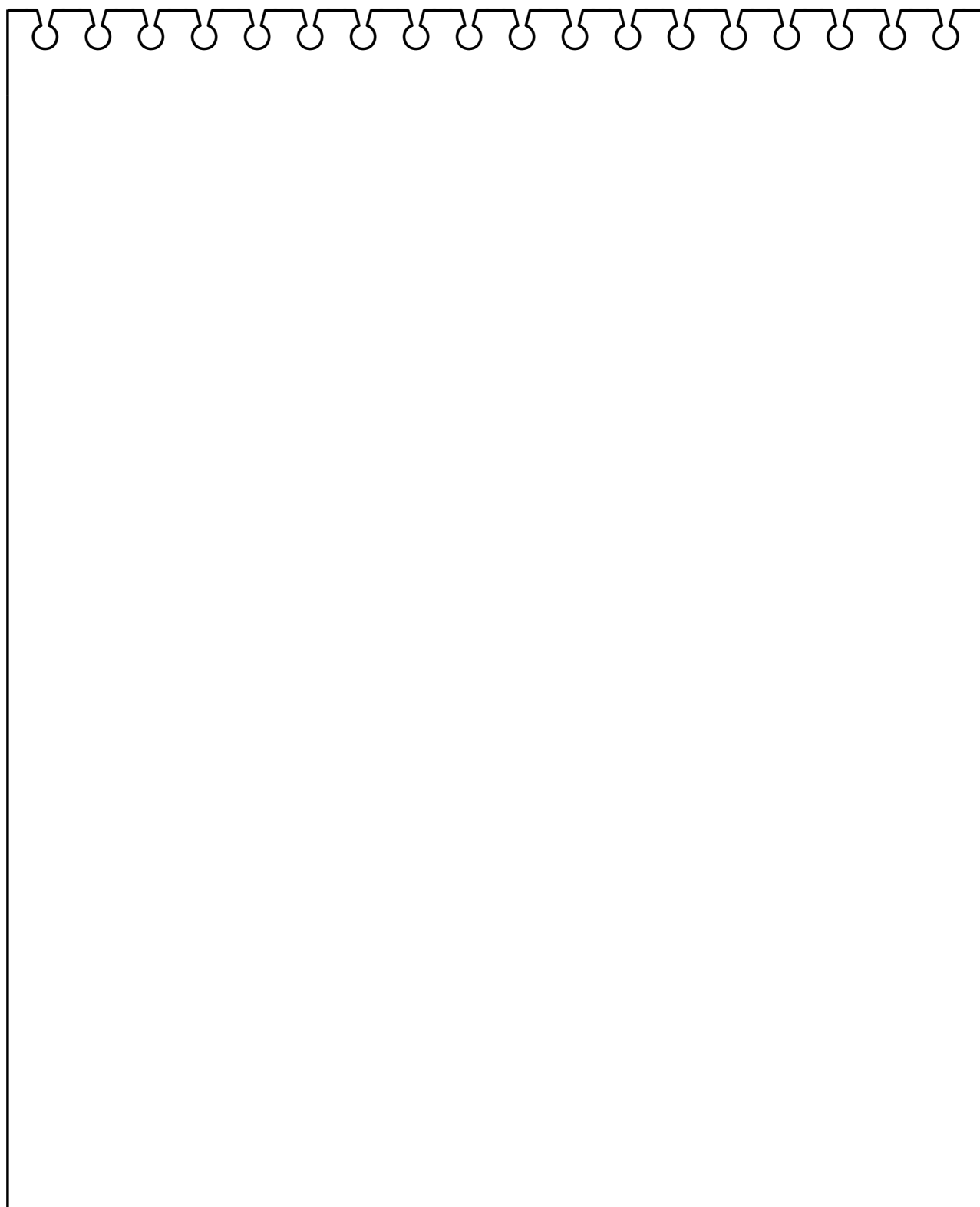
(4) $a \geq 4$ とする。関数 $y = f(x)$ の $a-2 \leq x \leq a+2$ における最大値は $\boxed{\text{チ}}a$ であり、関数 $y = f(x)$ の $a-2 \leq x \leq a+2$ における最小値は

$$4 \leq a \leq \boxed{\text{ツ}} \text{ のとき, } \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}a^2 + \boxed{\text{キ}}a \text{ であり,}$$

$$\boxed{\text{ツ}} < a \text{ のとき, } \boxed{\text{テト}}a + \boxed{\text{ナニ}} \text{ である。}$$

数学Ⅰ「2次関数」センター試験過去問10回分を解いて、この分野の問題を解く際に、気を付けるべきこと、注意点、反省点を振り返ってまとめておこう。

「ミスに気を付ける」のような漠然とした精神論ではなく、どのようなミスがなぜ起きたのかを分析し、再発防止のためにはどのような工夫をすればよいのかを具体的に考えよう。そこを反省することに過去問に取り組む意義がある。さらにその反省が今後、共通テストの対策をする際の指針となるであろう。



第3章 2次関数 解答

1

【2019 追】

ア	イ	ウ	エ	オ
－	6	2	3	4

2

【2019 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
4	3	2	1	3	0	3

3

【2019 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
2	4	1	2	2	1	4	2	13	2	4

シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
7	4	3	5	1	3	2	－	1	4

4

【2018 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	3	1	1	4	5	7	1	3	4

サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ
3	4	3	3	5	5	1	3	2	5	1	3	2

5

【2013 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
4	7	1	6	3	2	8	7	1	6	0	7	1	7	8	7

チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ
9	1	4	5	2	－	5	4	－	2	5	8

6
【2011 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ										
－	1	4	3	4	－	3	2	1	2										
							サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト			
							1	2	3	4	1	2	3	2	2	3			

7
【2017 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
4	6	4	4	3	4	5	1	2	3	5	9	2	4	1	6				
							チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ
							2	5	1	2	1	6	3	4	－	4	2	4	2

8
【2017 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ											
－	1	－	1	1	3	0	1	2											
							コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ				
							2	2	1	3	2	－	3	－	1				

9
【2007 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ													
1	0	3	2	0	4	2													
			ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ		
			－	1	4	－	1	8	2	6	4	1	2	8	1	0	2		

10
【2020 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ									
1	2	2	－	1	4	2	0	8	3	6									
							シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ		
							1	2	8	2	3	2	8	－	2	1	6		