第 4 章

図形と計量

1　四角形 ABCD は円に内接し，$\angle\mathrm{ABC}$ は鈍角で，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=\sqrt{6}$，$\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする。また，線分 AC と BD は直角に交わるとする。このとき

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}},\qquad \mathrm{AC}=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

となる。円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，$\sin\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ となる。また，AC と BD の交点を H とおくと，$\mathrm{DH}=\boxed{\text{スセ}}\mathrm{BH}$ である。

2 △ABC において $AB=6$，$BC=2\sqrt{7}$，$CA=4$ とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D，∠A の二等分線と △ABC の外接円との点 A と異なる交点を E とする。辺 AC の延長と，2 点 B，E を通る直線の交点を P とする。

(1) $\cos\angle ABC=\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$ である。

また，$\cos\angle BAC=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ であるから，$\angle BAC=\boxed{カキ}^\circ$ である。

(2) 点 E から辺 BC に引いた垂線と辺 BC との交点を H とすると，

$$\angle ECH=\boxed{クケ}^\circ,\qquad \angle EBH=\boxed{コサ}^\circ$$

であるから，$HC=\sqrt{\boxed{シ}}$ である。したがって，$CE=\dfrac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セソ}}}{\boxed{タ}}$ である。

(3) △ABP において

$$\angle APB=180^\circ-\angle BAP-\left(\angle CBP+\angle ABC\right)=\boxed{チツ}^\circ-\angle ABC$$

である。したがって，$\sin\angle APB=\dfrac{\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}$ である。

(4) △ECP において，$\sin\angle CEP=\dfrac{\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}$ であるから，$CP=\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ である。

3　△ABC において，AB = 3，BC = $\sqrt{7}$，CA = 2 とする。また，△ABC の外接円の中心を O とする。このとき，∠BAC = $\boxed{\text{アイ}}$° であり，外接円 O の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

さらに，辺 CA の A の側の延長上に点 D を DB = DC となるようにとる。cos∠BAD = $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であるから，AD = $\boxed{\text{ケ}}$ である。よって，△ADB の面積は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

下の $\boxed{\text{ソ}}$ には，次の ⓪ ～ ④ のうちから当てはまるものを一つ選べ。

⓪ AFO　　① ADF　　② ABE　　③ OAC　　④ EBF

線分 BD と外接円 O との B 以外の交点を E とし，線分 DO と外接円 O との交点を F とする。このとき，外接円 O において ∠AOF = $\boxed{\text{セ}}$∠ABF = ∠$\boxed{\text{ソ}}$ である。したがって，4 点 B，O，A，D は同一円周上にある。この円の中心を O′ とすると，円 O′ の半径は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

4 △ABC において，AB = AC = 10，$\cos\angle BAC = \frac{4}{5}$ とする。辺 AB の中点を D とする。

(1) C から AB に垂線をひき，垂線と AB との交点を H とする。このとき，
AH = $\boxed{\text{ア}}$，CH = $\boxed{\text{イ}}$ であり，BC = $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}$，CD = $\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。また ∠BCD = $\boxed{\text{クケ}}^\circ$ である。

(2) B において直線 AB に接し，C において直線 AC に接する円の中心を O とする。CD と円 O との交点のうち C と異なる方を E とする。△BDE と相似な三角形は，次の ⓪ ～ ③ のうち $\boxed{\text{コ}}$ である。

⓪ △ABC　　① △CDB　　② △CAE　　③ △ACH

したがって BE = $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。よって AE = $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ であり，△ABE の面積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

AE の延長と円 O との交点のうち E と異なる方を F とするとき AF = $\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

5　△ABC の辺の長さと角の大きさを測ったところ，$AB = 7\sqrt{3}$ および $\angle ACB = 60^\circ$ であった。したがって，△ABC の外接円 O の半径は $\boxed{\text{ア}}$ である。外接円 O の，点 C を含む弧 AB 上で点 P を動かす。

(1) $2PA = 3PB$ となるのは $PA = \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ のときである。

(2) △PAB の面積が最大となるのは $PA = \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ のときである。

(3) $\sin\angle PBA$ の値が最大となるのは $PA = \boxed{\text{キク}}$ のときであり，このとき △PAB の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

6 $\triangle$ABC において，AB $= 6$，BC $= \sqrt{21}$，AC $= 3$ とする。このとき

$$\cos\angle BAC = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \qquad \sin\angle BAC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。点 C から辺 AB に下ろした垂線を CH とするとき，AH $= \boxed{\text{オ}}$，CH $= \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。また，線分 CH 上に AH $=$ HD を満たす点 D をとるとき，AD $= \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$，CD $= \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}}$ であるから

$$\triangle \text{ACD の面積} = \sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}}$$

であり

$$\sin\angle CAD = \frac{\sqrt{\boxed{\text{スセ}}} - \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。したがって，$\triangle$ACD の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。また，辺 AB の中点を E とし，直線 AD と辺 BC の交点を F とすると

$$\frac{\triangle \text{ACF の面積}}{\triangle \text{AEF の面積}} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}} - \boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

7 △ABC を AB = 8，BC = 12，CA = 10 を満たす三角形とする。辺 AB の中点を D，辺 BC の中点を E とする。このとき，$\sin\angle \mathrm{DBE} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$，△DBE の面積は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。△DBE の内心を I とする。

(1) 内接円 I の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。円 I と辺 BE の接点を L とすると，$\mathrm{BL} = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であるので，$\mathrm{BI} = \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ である。

三つの線分 AD，CE，DE すべてに接する円の中心を J とする。円 J と線分 CE との接点を X，線分 DE との接点を Y，線分 AD との接点を Z とする。

(2) 直線 BX，BZ はともに点 B から円 J に引いた接線であるので，BX = BZ である。これより $\mathrm{EX} = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。$\angle \mathrm{JBE} = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\angle \mathrm{DBE}$，$\angle \mathrm{IBE} = \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\angle \mathrm{DBE}$ より $\mathrm{BJ} = \boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

(3) △DBE を含む平面と垂直で，直線 BJ を含む平面を考え，この平面内にある円で，線分 BJ を直径とするものを O とする。この円 O の円周上に点 K を，BJ と KI が直交するようにとると，$\mathrm{KI} = \boxed{\text{ヌ}}$ となるので，三角錐 KBDE の体積は $\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$ となる。

8　△ABC において，$AB = 2$，$BC = \sqrt{5}+1$，$CA = 2\sqrt{2}$ とする。また，△ABC の外接円の中心を O とする。

(1) このとき，$\angle ABC = \boxed{アイ}^\circ$ であり，外接円 O の半径は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\sqrt{\boxed{オ}}$ である。

(2) 円 O の円周上に点 D を，直線 AC に関して点 B と反対側の弧の上にとる。△ABD の面積を S_1，△BCD の面積を S_2 とするとき

$$\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{5}-1 \qquad \cdots①$$

であるとする。$\angle BAD + \angle BCD = \boxed{カキク}^\circ$ であるから

$$CD = \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}AD$$

となる。このとき

$$CD = \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\sqrt{\boxed{スセ}}$$

である。

さらに，2 辺 AD，BC の延長の交点を E とし，△ABE の面積を S_3，△CDE の面積を S_4 とする。このとき

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}} \qquad \cdots②$$

である。①と②より

$$\frac{S_2}{S_4} = \frac{\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$$

となる。

9 △ABC において，$AB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$AC=\dfrac{1}{3}$，$\sin\angle ACB=\dfrac{3}{5}$ とする。

(1) △ABC の外接円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

$\cos\angle ACB=\pm\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であるから，$BC=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ または $BC=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(2) 以下では $BC=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ とする。

このとき，$\tan\angle ACB=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$\cos\angle BAC=\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

また，△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

△ABC の外接円の，点 A での接線と点 B での接線の交点を P とし，点 A での接線と点 C での接線の交点を Q とする。△ABC の外接円の中心を O とし，線分 OP と辺 AB の交点を R，線分 OQ と辺 AC の交点を S とする。このとき，∠AOB と ∠ACB の関係から

$$\tan\angle AOP=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}},\qquad AP=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。また，四角形 ORAS の内角 ∠ROS については，$\cos\angle ROS=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

10 $\triangle$ABC において，AB $= 2$，BC $= \sqrt{7}$，CA $= \sqrt{3}$ とする。このとき，$\angle$BAC $= \boxed{\text{アイ}}^\circ$ であるから

$$\sin\angle \mathrm{ABC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}, \qquad \cos\angle \mathrm{ABC} = \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

$\angle$BAC の三等分線と辺 BC との交点を，点 B に近い方から順に，点 M，N とする。

$\triangle$ABM において，点 M から辺 AB に垂線を引くと

$$\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\mathrm{AM} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}\mathrm{BM}$$

であり

$$\mathrm{AB} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}\mathrm{AM} + \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\mathrm{BM}$$

である。よって

$$\mathrm{AM} = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \qquad \mathrm{BM} = \frac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

$\triangle$AMN と $\triangle$ANC について，$\triangle$AMN の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$AN であり，$\triangle$ANC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$AN である。

また，$\triangle$AMC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ であるから，AN $= \dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

数学 I「図形と計量」センター試験過去問 10 回分を解いて，この分野の問題を解く際に，気を付けるべきこと，注意点，反省点を振り返ってまとめておこう．

「ミスに気を付ける」のような漠然とした精神論ではなく，どのようなミスがなぜ起きたのかを分析し，再発防止のためにはどのような工夫をすればよいのかを具体的に考えよう．そこを反省することに過去問を取り組む意義がある．さらにその反省が今後，共通テストの対策をする際の指針となるであろう．

第4章　図形と計量　　解答

1
【1998 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
−	6	3	3	2	3	6	2	1	3	6	9	1	0

2
【2013 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
2	7	7	1	2	6	0	3	0	3	0	7	2	2	1	3

チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
9	0	2	7	7	3	2	7	2

3
【2008 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
6	0	2	1	3	−	1	2	5	1	5

シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
4	3	2	②	7	3	3

4
【2009 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
8	6	2	1	0	3	5	4	5	①	1	0	2	3

ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ
1	0	5	3	5	0	3	6	5

5
【2016 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
7	3	2	1	7	3	1	4	4	9	3	2

6
【2018 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
2	3	5	3	2	5	2	2	5	2	5	2

ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ
1	0	2	2	6	3	2	2	5	1	3

7
【2014 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
5	7	1	6	1	5	7	4	7	2	5	2	2	2	3	2

チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
1	2	1	2	6	2	4	5	7

8
【2007 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
6	0	2	3	6	1	8	0	1	2

サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
2	7	1	4	7	2	5	2

9
【2018 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
5	6	4	5	2	1	5	2	3	3	4	–	5	5

ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ
1	1	5	3	4	5	8	5	5

10
【2012 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
9	0	2	1	7	2	7	7	1	2	3	2	4	3	5

タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ
2	7	5	3	5	3	4	3	3	5	4	3