第 5 章

場合の数と確率

1 袋の中に赤玉 5 個，白玉 5 個，黒玉 1 個の合計 11 個の玉が入っている。赤玉と白玉にはそれぞれ 1 から 5 までの数字が一つずつ書かれており，黒玉には何も書かれていない。なお，同じ色の玉には同じ数字は書かれていない。この袋から同時に 5 個の玉を取り出す。

5 個の玉の取り出し方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある。取り出した 5 個の中に同じ数字の赤玉と白玉の組が 2 組あれば得点は 2 点，1 組だけあれば得点は 1 点，1 組もなければ得点は 0 点とする。

(1) 得点が 0 点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは $\boxed{\text{エオ}}$ 通りであり，黒玉が含まれていないのは $\boxed{\text{カキ}}$ 通りである。得点が 1 点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは $\boxed{\text{クケコ}}$ 通りであり，黒玉が含まれていないのは $\boxed{\text{サシス}}$ 通りである。

(2) 得点が 1 点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ であり，2 点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

2　1 から 9 までの数字が一つずつ書かれた 9 枚のカードから 5 枚のカードを同時に取り出す。このようなカードの取り出し方は $\boxed{アイウ}$ 通りある。

(1) 取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがある取り出し方は $\boxed{エオ}$ 通りであり，5 と書かれたカードがない取り出し方は $\boxed{カキ}$ 通りである。

(2) 次のように得点を定める。

- 取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがない場合は，得点を 0 点とする。
- 取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがある場合，この 5 枚を書かれている数の小さい順に並べ，5 と書かれたカードが小さい方から k 番目にあるとき，得点を k 点とする。

得点が 0 点となる確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。得点が 1 点となる確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシス}}$ で，得点が 2 点となる確率は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$，得点が 3 点となる確率は $\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である。また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ 点である。

3 1 から 10 までの番号がつけられた 10 枚のカードから，5 枚のカードを同時に取り出す。このとき，取り出した 5 枚のカードの番号の中で，最も大きな番号を L，最も小さな番号を S として，得点を次のように定める。

- L が偶数のとき，得点を 0 点とする
- L が奇数のとき，L と S の差 $L-S$ を得点とする

(1) 5 枚のカードの取り出し方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りあり，そのうち得点が 0 点となるカードの取り出し方は $\boxed{\text{エオカ}}$ 通りある。

(2) とり得る正の得点の中で最も低いのは $\boxed{\text{キ}}$ 点で，得点が $\boxed{\text{キ}}$ 点となるカードの取り出し方は $\boxed{\text{ク}}$ 通りある。
とり得る得点の中で最も高いのは $\boxed{\text{ケ}}$ 点で，得点が $\boxed{\text{ケ}}$ 点となるカードの取り出し方は $\boxed{\text{コサ}}$ 通りある。

(3) 得点が 5 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$，得点が 6 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$，得点が 7 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。
また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ナニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である。

4 1 辺の長さ 1 の正六角形があり，その頂点の一つを A とする。一つのさいころを 3 回投げ，点 P を次の (a)，(b)，(c) にしたがって，この正六角形の辺上を反時計回りに進める。

(a) 頂点 A から出発して，1 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(b) 1 回目で点 P がとまった位置から出発して，2 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(c) 2 回目で点 P がとまった位置から出発して，3 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(1) 3 回進めたとき，点 P が正六角形の辺上を 1 周して，ちょうど頂点 A に到達する目の出方は $\boxed{アイ}$ 通りである。

3 回進める間に，点 P が 1 回も頂点 A にとまらない目の出方は $\boxed{ウエオ}$ 通りである。

(2) 3 回進める間に，点 P が 3 回とも頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キクケ}}$ であり，ちょうど 2 回だけ頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$ である。

3 回進める間に，点 P がちょうど 1 回だけ頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソタ}}$ である。

(3) 3 回進める間に，点 P が頂点 A にとまる回数の期待値は $\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ 回である。

5

(1) 1 から 4 までの数字を，重複を許して並べてできる 4 桁の自然数は，全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 個ある。

(2) (1) の $\boxed{\text{アイウ}}$ 個の自然数のうちで，1 から 4 までの数字を重複なく使ってできるものは $\boxed{\text{エオ}}$ 個ある。

(3) (1) の $\boxed{\text{アイウ}}$ 個の自然数のうちで，1331 のように，異なる二つの数字を 2 回ずつ使ってできるものの個数を，次の考え方に従って求めよう。

(i) 1 から 4 までの数字から異なる二つを選ぶ。この選び方は $\boxed{\text{カ}}$ 通りある。

(ii) (i) で選んだ数字のうち小さい方を，一・十・百・千の位のうち，どの 2 箇所に置くか決める。置く 2 箇所の決め方は $\boxed{\text{キ}}$ 通りある。小さい方の数字を置く場所を決めると，大きい方の数字を置く場所は残りの 2 箇所に決まる。

(iii) (i) と (ii) より，求める個数は $\boxed{\text{クケ}}$ 個である。

(4) (1) の $\boxed{\text{アイウ}}$ 個の自然数を，それぞれ別々のカードに書く。できた $\boxed{\text{アイウ}}$ 枚のカードから 1 枚引き，それに書かれた数の四つの数字に応じて，得点を次のように定める。

- 四つとも同じ数字のとき　9 点
- 2 回現れる数字が二つあるとき　3 点
- 3 回現れる数字が一つと，1 回だけ現れる数字が一つあるとき　2 点
- 2 回現れる数字が一つと，1 回だけ現れる数字が二つあるとき　1 点
- 数字の重複がないとき　0 点

(i) 得点が 9 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$，得点が 3 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(ii) 得点が 2 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$，得点が 1 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である。

(iii) 得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ 点である。

6　赤球 4 個，青球 3 個，白球 5 個，合計 12 個の球がある。これら 12 個の球を袋の中に入れ，この袋から A さんがまず 1 個取り出し，その球をもとに戻さずに続いて B さんが 1 個取り出す。

(1) A さんと B さんが取り出した 2 個の球のなかに，赤球か青球が少なくとも 1 個含まれている確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(2) A さんが赤球を取り出し，かつ B さんが白球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。これより，A さんが取り出した球が赤球であったとき，B さんが取り出した球が白球である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

(3) A さんは 1 球取り出したのち，その色を見ずにポケットの中にしまった。B さんが取り出した球が白球であることがわかったとき，A さんが取り出した球も白球であった条件付き確率を求めたい。

A さんが赤球を取り出し，かつ B さんが白球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ であり，A さんが青球を取り出し，かつ B さんが白球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。同様に，A さんが白球を取り出し，かつ B さんが白球を取り出す確率を求めることができ，これらの事象は互いに排反であるから，B さんが白球を取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

7 A，B，C の 3 人がいる。また，「A」と書かれた玉が 3 個，「B」と書かれた玉が 2 個，「C」と書かれた玉が 1 個ある。「A」と書かれた玉の持ち主は A で，「B」と書かれた玉の持ち主は B，「C」と書かれた玉の持ち主は C である。

(1) 全部の玉を一つの袋に入れておき，袋から 1 個の玉を取り出して，出た玉の持ち主を勝者とするゲームを考える。ゲームが 1 回終わるごとに，出た玉を袋に戻す。

(i) ゲームを 4 回行うとき，勝者が順に A，A，B，C となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

(ii) ゲームを 4 回行うとき，B が 2 回以上勝つ確率は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(iii) ゲームを 6 回行うとき，A が 3 回，B が 2 回，C が 1 回勝つ確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

(2) こんどは，A，B，C のうち 2 人の対戦を考える。2 人の対戦では，対戦者 2 人が持つ玉だけを全部合わせて一つの袋に入れ，袋から 1 個の玉を取り出して，出た玉の持ち主を勝者とする。1 回対戦が終わるごとに，すべての玉を持ち主に返す。

優勝賞金を 60 万円用意して，A と B，A と C，B と C が 1 回ずつ対戦する「総当り戦」を行い，勝った回数が最も多い人が優勝賞金を受け取る。該当者が複数いる場合は，該当者の間で等分する。

(i) A，B，C が 20 万円ずつ受け取る確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(ii) A が 20 万円以上受け取る確率は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(iii) A が受け取る優勝賞金の期待値は $\boxed{\text{チツ}}$ 万円，B が受け取る優勝賞金の期待値は $\boxed{\text{テト}}$ 万円，C が受け取る優勝賞金の期待値は $\boxed{\text{ナ}}$ 万円である。

8 赤い袋には赤球 2 個と白球 1 個が入っており，白い袋には赤球 1 個と白球 1 個が入っている。

最初に，さいころ 1 個を投げて，3 の倍数の目が出たら白い袋を選び，それ以外の目が出たら赤い袋を選び，選んだ袋から球を 1 個取り出して，球の色を確認してその袋に戻す。ここまでの操作を 1 回目の操作とする。2 回目と 3 回目の操作では，直前に取り出した球の色と同じ色の袋から球を 1 個取り出して，球の色を確認してその袋に戻す。

(1) 1 回目の操作で，赤い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，白い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) 2 回目の操作が白い袋で行われる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(3) 1 回目の操作で白球を取り出す確率を p で表すと，2 回目の操作で白球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}p+\dfrac{1}{3}$ と表される。

よって，2 回目の操作で白球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シスセ}}}$ である。

同様に考えると，3 回目の操作で白球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソタチ}}}{\boxed{\text{ツテト}}}$ である。

(4) 2 回目の操作で取り出した球が白球であったとき，その球を取り出した袋の色が白である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

また，3 回目の操作で取り出した球が白球であったとき，はじめて白球が取り出されたのが 3 回目の操作である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒフヘ}}}$ である。

9 机が三つあり，各机の上には白のカードが 1 枚，各机の下には箱が一つ置かれている。いずれの箱の中にも白のカード 1 枚，青のカード 2 枚，合計 3 枚のカードが入っている。次の操作 S を行うため，各机の前に一人ずつ配置する。

S： 机の下に置かれた箱の中から無作為に取り出したカード 1 枚と，同じ机の上に置かれたカードとを交換することを，3 人が同時に行う。

この操作 S を 2 回繰り返す。また，状態 A，B を次のように定める。

A： すべての机の上に同色のカードが置かれている。
B： 二つの机の上に同色のカードが置かれ，残りの一つの机の上には別の色のカードが置かれている。

(1) 1 回目の終了時に，すべての机の上に白のカードが置かれている確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ であり，すべての机の上に青のカードが置かれている確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ である。

(2) 1 回目の終了時に，状態 A になる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ であり，状態 B になる確率は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。

(3) 1 回目の終了時に二つの机の上に白のカードが置かれ，残りの一つの机の上に青のカードが置かれていたとき，2 回目の終了時には状態 A になる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。
また，1 回目の終了時に二つの机の上に青のカードが置かれ，残りの一つの机の上に白のカードが置かれていたとき，2 回目の終了時には状態 A になる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

(4) 2 回目の終了時に状態 A になる確率は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}$ である。

(5) 2 回目の終了時に状態 B になったとき，1 回目の終了時も状態 B である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}}$ である。

10　壺（つぼ）の中に 6 個の赤玉と 4 個の白玉の合計 10 個の玉が入っている。この壺から，玉を 1 個ずつ 10 回続けて取り出す。ただし，一度取り出した玉はもとに戻さないものとする。

(1) 1 回目と 2 回目に連続して赤玉が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) i を 2 から 9 までの整数とし，i 回目と $(i+1)$ 回目に連続して赤玉が取り出される確率 p_i を考える。同じ色の玉は区別しない場合，10 個すべての玉の取り出し方は，取り出した玉を 1 列に並べる並べ方の総数に等しく，$\boxed{\text{ウエオ}}$ 通りである。それらのうち，8 回目の取り出しを終えた時点で白玉がすべて取り出されている取り出し方は $\boxed{\text{カキ}}$ 通りである。よって，p_9 の値は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。また，p_3 の値は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(3) 4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 2 個以上取り出されている確率は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。よって，4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 2 個以上取り出されていたとき，1 回目と 2 回目に連続して赤玉が取り出されている条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(4) 4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 2 個以上取り出されていたとき，9 回目と 10 回目に連続して赤玉が取り出される条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌネ}}}$ である。

(5) 壺からまず 3 個の玉を同時に取り出して，玉の色は確認せずに印をつけて壺に戻したのち，改めて玉を 1 個ずつ 10 回続けて取り出す。一度取り出した玉はもとに戻さない。9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ である。

数学 A「場合の数と確率」センター試験過去問 10 回分を解いて，この分野の問題を解く際に，気を付けるべきこと，注意点，反省点を振り返ってまとめておこう．

「ミスに気を付ける」のような漠然とした精神論ではなく，どのようなミスがなぜ起きたのかを分析し，再発防止のためにはどのような工夫をすればよいのかを具体的に考えよう．そこを反省することに過去問を取り組む意義がある．さらにその反省が今後，共通テストの対策をする際の指針となるであろう．

第 5 章 場合の数と確率 解答

1
【2010 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
4	6	2	8	0	3	2	1	2	0	1	6	0

セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
2	0	3	3	5	3	3	1	0	1	1

2
【2012 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
1	2	6	7	0	5	6	4	9

コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
1	1	2	6	8	6	3	2	7	5	3

3
【2011 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
2	5	2	1	6	6	4	3	8	3	5	2	6	3

ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
5	6	3	5	6	3	1	4	8	6	3

4
【2007 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
1	0	1	2	5	1	2	1	6

コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
5	7	2	2	5	7	2	1	2

5
【2013 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
2	5	6	2	4	6	6	3	6

コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ
1	6	4	9	6	4	3	1	6	9	1	6	3	2

6
【2016 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
2	8	3	3	5	3	3	5	1	1

サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
5	4	4	5	1	2	4	1	1

7
【2014 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	7	2	1	1	2	7	5	3	6

サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
1	5	1	3	2	0	3	1	2	0	9

8
【2019 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
4	9	1	6	7	1	8	1	6	4	3	1	0	8

ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ
2	5	9	6	4	8	2	1	4	3	8	8	2	5	9

9
【2019 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
1	2	7	8	2	7	1	3	2	3

サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
2	9	7	2	7	7	1	0

10
【2020 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
1	3	2	1	0	7	0	1	3	1	3	3	7	4	2

タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ
1	4	3	7	5	3	1	8	5	1	4	5