第 6 章

図形の性質

1　三角形 ABC の辺 AB，AC 上にそれぞれ点 D，E を AD : AE = 2 : 3 となるようにとる。直線 DE と直線 BC は点 F で交わるとする。

(1) AD : BD = 2 : 3，AE : CE = 3 : 1 であるとき，三角形 ADE の面積を S，四角形 BCED の面積を T とすれば，$\dfrac{S}{T} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) BD : CE = 3 : 1 とする。このとき，$\dfrac{\text{BF}}{\text{CF}} = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。さらに，4 点 B，C，E，D が同一円周上にあるとき，AD = $2a$，CE = b とおくと，$\boxed{\text{オ}}\,a = \boxed{\text{カ}}\,b$ である。したがって，$\dfrac{\text{AB}}{\text{AC}} = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。$\dfrac{\text{AD}}{\text{BD}} = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。また，$\dfrac{\text{EF}}{\text{DF}} = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

2 △ABC において，AB = 7，BC = 3 である。△ABC の内心を I とする。AI の延長と辺 BC との交点を D とし，BI の延長と辺 AC との交点を E とする。4 点 C，E，I，D は同一円周上にあるものとする。下の文章中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$，$\boxed{\text{エオ}}$ については，当てはまる文字を A ～ E のうちから選べ。

(1) $\angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{AI}\boxed{\text{ア}} = \angle\mathrm{B}\boxed{\text{イウ}} + \angle\mathrm{A}\boxed{\text{エオ}}$ であるから，$\angle\mathrm{BCA} = \boxed{\text{カキ}}^\circ$ である。

したがって，$\mathrm{CA} = \boxed{\text{ク}}$ である。また $\mathrm{BD} = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$\mathrm{BI}\cdot\mathrm{BE} = \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(2) △ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。また，△ABC の面積は

$\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ であり，△ABC の内接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

3 四角形 ABCD において，AB = 4，BC = 2，DA = DC であり，4 つの頂点 A，B，C，D は同一円周上にある。対角線 AC と対角線 BD の交点を E，線分 AD を 2 : 3 の比に内分する点を F，直線 FE と直線 DC の交点を G とする。

次の [ア] には，下の ⓪ ～ ④ のうちから当てはまるものを一つ選べ。

∠ABC の大きさが変化するとき四角形 ABCD の外接円の大きさも変化することに注意すると，∠ABC の大きさがいくらであっても，∠DAC と大きさが等しい角は，∠DCA と ∠DCA と [ア] である。

⓪ ∠ABD　① ∠ACB　② ∠ADB　③ ∠BCG　④ ∠BEG

このことにより $\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AE}} = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。次に，△ACD と直線 FE に着目すると，$\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{DG}} = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(1) 直線 AB が点 G を通る場合について考える。
このとき，△AGD の辺 AG 上に点 B があるので，BG = [カ] である。
また，直線 AB と直線 DC が点 G で交わり，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあるので，DC = $\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(2) 四角形 ABCD の外接円の直径が最小となる場合について考える。
このとき，四角形 ABCD の外接円の直径は [ケ] であり，∠BAC = [コサ]° である。
また，直線 FE と直線 AB の交点を H とするとき，$\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{DG}} = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ の関係に着目して AH を求めると，AH = [シ] である。

4 △ABC において $AB = 2$，$AC = 1$，$\angle A = 90^\circ$ とする。

$\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，$BD = \dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

点 A を通り点 D で辺 BC に接する円と辺 AB との交点で A と異なるものを E とすると，$AB \cdot BE = \dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であるから，$BE = \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

次の $\boxed{\text{コ}}$ には下の ⓪ ～ ② から，$\boxed{\text{サ}}$ には ③・④ から当てはまるものを一つずつ選べ。

$\dfrac{BE}{BD}\ \boxed{\text{コ}}\ \dfrac{AB}{BC}$ であるから，直線 AC と直線 DE の交点は辺 AC の端点 $\boxed{\text{サ}}$ の側の延長上にある。

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$　　③ A　　④ C

その交点を F とすると，$\dfrac{CF}{AF} = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であるから，$CF = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。したがって，BF の長さが求まり，$\dfrac{CF}{AC} = \dfrac{BF}{AB}$ であることがわかる。

次の $\boxed{\text{タ}}$ には下の ⓪ ～ ③ から当てはまるものを一つ選べ。

点 D は △ABF の $\boxed{\text{タ}}$ 。

⓪ 外心である　　① 内心である　　② 重心である
③ 外心，内心，重心のいずれでもない

5 　△ABC において，辺 BC を 7 : 1 に内分する点を D とし，辺 AC を 7 : 1 に内分する点を E とする。線分 AD と線分 BE の交点を F とし，直線 CF と辺 AB の交点を G とすると

$$\frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{AG}}=\boxed{\text{ア}},\qquad \frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\qquad \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{GF}}=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。したがって

$$\frac{\triangle\mathrm{CDG}\text{ の面積}}{\triangle\mathrm{BFG}\text{ の面積}}=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

となる。

4 点 B，D，F，G が同一円周上にあり，かつ FD = 1 のとき

$$\mathrm{AB}=\boxed{\text{ケコ}}$$

である。さらに，$\mathrm{AE}=3\sqrt{7}$ とするとき，$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AC}=\boxed{\text{サシ}}$ であり

$$\angle\mathrm{AEG}=\boxed{\text{ス}}$$

である。$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ ∠BGE　　① ∠ADB　　② ∠ABC　　③ ∠BAD

6 三角形 ABC を 1 辺の長さが 7 の正三角形とし，点 O を中心とする円 O をその外接円とする。円 O の点 B を含まない弧 CA 上に，点 D を弦 CD の長さが 3 になるようにとる。このとき，

$\angle\mathrm{ADC} = \boxed{\text{アイウ}}^\circ$ であり，$\mathrm{AD} = \boxed{\text{エ}}$ となる。したがって，$\sin\angle\mathrm{ACD} = \dfrac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

次に，線分 AC と線分 BD の交点を E とおく。

このとき，$\angle\mathrm{BDC} = \boxed{\text{ケコ}}^\circ$ であり，$\mathrm{AE} : \mathrm{EC} = \boxed{\text{サ}} : 3$ である。したがって，$\mathrm{AE} = \dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

この結果を用いて線分 OE の長さを求めよう。直線 OE と円 O との二つの交点を F，G とする。ただし，E に近い方を G，遠い方を F とする。このとき，$\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EG} = \dfrac{\boxed{\text{ソタチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ となる。

よって，$\mathrm{OE} = \dfrac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

7　△ABC の内心を O，内接円 O と辺 BC の接点を H とする。辺 BC 上に点 D をとる。ただし，D は B，C と異なる点とする。△ABD の内心を P とし，内接円 P と辺 BD の接点を E とする。△ACD の内心を Q とし，内接円 Q と辺 CD の接点を F とする。

PQ を直径とする円と 2 点 D，H の間の関係で △ABC がどのような形でも成り立つものを調べる。次の $\boxed{\text{オ}}$ には，下の ⓪ ～ ③ のうちから当てはまるものを一つ選べ。

$\angle\text{ADP} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\angle\text{ADB}$，$\angle\text{ADQ} = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\angle\text{ADC}$ であるから，PQ を直径とする円と点 D の関係について正しい選択肢は $\boxed{\text{オ}}$ である。

⓪ D が辺 BC 上のどの位置にあっても，D はその円の内部にある。
① D が辺 BC 上のどの位置にあっても，D はその円周上にある。
② D が辺 BC 上のどの位置にあっても，D はその円の外部にある。
③ D が辺 BC 上のどの位置にあるかに応じて，D は，円の内部，円周上，円の外部のどの場合もある。

次の $\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

$$\text{BH} = \frac{1}{2}\left(\text{AB} + \boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}}\right) \quad \cdots ①$$

$$\text{BE} = \frac{1}{2}\left(\text{AB} + \boxed{\text{ク}} - \boxed{\text{ケ}}\right) \quad \cdots ②$$

$$\text{DF} = \frac{1}{2}\left(\text{CD} + \boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}\right) \quad \cdots ③$$

である。

⓪ AC　　① AD　　② BC　　③ BD

次の $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

① ～ ③から，EH $= \boxed{\text{シ}}$ であることがわかる。

⓪ FQ　　① OP　　② $\dfrac{1}{2}$EP　　③ DF

次の $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

PQ の中点を J とする。J を通り辺 BC に垂直な直線と BC の交点を K とすると，K は EF の中点であるから，HK $= \boxed{\text{ス}}$ である。

⓪ DK　　① $\dfrac{1}{2}$JK　　② EH　　③ $\dfrac{1}{2}$FK

次の $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

HK ＝ $\boxed{\text{ス}}$ に着目すると，PQ を直径とする円と点 H の関係について，正しい選択肢は $\boxed{\text{セ}}$ である。

⓪ D が辺 BC 上のどの位置にあっても，H はその円の内部にある。
① D が辺 BC 上のどの位置にあっても，H はその円周上にある。
② D が辺 BC 上のどの位置にあっても，H はその円の外部にある。
③ D が辺 BC 上のどの位置にあるかに応じて，H は，円の内部，円周上，円の外部のどの場合もある。

8　二等辺三角形 ABC において，AB = AC = 2，BC = 3 とする。直線 AC 上に，C とは異なる点 D を ∠ABC = ∠ABD を満たすようにとると，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。△ABD と △BCD において，∠ABD = ∠BCD で ∠D は共通であるから，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}} = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} \cdot \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}$ に着目すると，$\mathrm{CD} = \dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ である。

△BCD の外接円を O とし，点 B における円 O の接線と直線 AC との交点を E とすると，点 E は辺 AC の A の側の延長上にある。このとき

$$\angle \mathrm{DBE} = \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}} \angle \mathrm{ABE}$$

であるから，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}} = \dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

また，線分 BE は線分 $\boxed{シ}$ と同じ長さである。$\boxed{シ}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ④ のうちから一つ選べ。

⓪ AB　　① AD　　② AE　　③ BC　　④ CD

したがって，$\mathrm{DE} = \dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}}$ である。

辺 BC の中点を M とし，線分 EM と線分 ED の交点を F とすると

$$\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{EF}} = \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}}$$

である。

9 $\triangle$PBD の辺 PB 上に 2 点 P，B のいずれとも異なる点 A をとり，辺 PD 上に 2 点 P，D のいずれとも異なる点 C をとる。4 点 A，B，C，D が同一円周上にあり，AB $= 2$，PC $= 2$，PD $= 12$ のとき，PA $=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

点 M を線分 AB の中点とし，点 N を線分 CD の中点とする。線分 AB を直径とする円と線分 CD を直径とする円が点 E で接していて，3 点 M，E，N が一直線上にこの順に並んでいるとする。このとき

$$\text{MN} = \boxed{\text{イ}}, \qquad \text{PE} = \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

である。また

$$\cos\angle\text{MPN} = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

である。

線分 PN 上に点 F を直線 MF と直線 PN が垂直に交わるようにとり，線分 PM 上に点 G を直線 NG と直線 PM が垂直に交わるようにとる。このとき

$$\text{PF} = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}, \qquad \text{PG} = \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。さらに，線分 MF と線分 NG の交点を J とする。このとき

$$\text{JE} = \frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$$

である。

10　△ABC において，$AB=\sqrt{6}$，$BC=4$，$\cos\angle ABC=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ とする。

辺 BC 上の点 D を $BD=1$ となるようにとり，△ACD の外接円と辺 AB の交点で，点 A とは異なる点を E とする。このとき

$$BE\cdot BA=\boxed{\text{ア}}$$

であるから，$BE=\dfrac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

線分 AD と線分 EC の交点を P とすると

$$\frac{AP}{PD}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。$AD=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であるから，$PD=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。また，$\cos\angle ADB=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

次に，△AEP の外接円と直線 BP の交点で，点 P とは異なる点を L とする。

$$BP\cdot BL=\boxed{\text{チ}}$$

である。

$$BD\cdot BC=4$$

であるから，$\tan\angle BLC=\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ である。

数学 A「図形の性質」センター試験過去問 10 回分を解いて，この分野の問題を解く際に，気を付けるべきこと，注意点，反省点を振り返ってまとめておこう．

「ミスに気を付ける」のような漠然とした精神論ではなく，どのようなミスがなぜ起きたのかを分析し，再発防止のためにはどのような工夫をすればよいのかを具体的に考えよう．そこを反省することに過去問を取り組む意義がある．さらにその反省が今後，共通テストの対策をする際の指針となるであろう．

第 6 章　図形の性質　　解答

1
【1998 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
3	7	9	2	5	3	3	2	2	5	1	2

2
【2007 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
E	A	D	B	E	6	0	8	7	5	2	1	5

セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
7	3	3	6	3	2	3	3

3
【2016 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
0	1	2	1	3	3	2	7	4	3	0	2

4
【2018 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
2	5	3	2	0	9	1	0	9	0	4	5	8	5	3	1

5
【2020 本】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
1	1	8	2	7	9	5	6	1	2	7	2	2

6
【2006 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
1	2	0	5	5	3	1	4	6	0	5	3	5	8

ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
7	3	5	6	4	7	5	7	2	4

7
【2016 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
1	2	1	2	1	2	0	3	1	1	0	3	0	1

8
【2017 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
2	3	2	3	1	8	5	1	2	4	5

シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
2	3	2	5	9	3	2

9
【2020 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
4	6	2	6	1	9	3	5	1	9	7

シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
1	9	5	5	6	1	2

10
【2019 追】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
4	2	6	3	2	3	5	1	3

コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
5	1	5	5	1	5	1	4	5	2