二次切替数学ドリル（数学ⅠＡⅡＢＣ）

1 $(a+b+1)(a+b-1)=(a+b)^2-1^2=4$，$(3a-b)^2-3^2=7$ より，

$$(a+b)^2=5,\ (3a-b)^2=16$$

である。a, b は正なので，$a+b>0$ より，

$$a+b=\sqrt{5},\ 3a-b=\pm 4$$

である。よって，

$$(a,b)=\left(\frac{\sqrt{5}\pm 4}{4},\ \frac{2\sqrt{5}\mp 4}{4}\right)\quad (\text{複号同順})$$

となり，a, b は正なので，

$$a=\frac{\sqrt{5}+4}{4},\ b=\frac{3\sqrt{5}-4}{4}$$

となる。

2 最大値をもつので，$y=ax^2+x+b$ のグラフは上に凸である。よって，$a<0$。また，$y=ax^2+x+b$ は頂点において最大値をとるので，

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2a} & =1, \\ a+1+b & =-3 \end{cases}$$

である。これを解くと，

$$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{7}{2}$$

となる。

3 $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:1$ のとき，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ であり，

$$(x-1)^2+y^2=(x-9)^2+y^2$$

より，$x=5$。また，$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:3$ のとき，$9\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ であり，

$$9\{(x-1)^2+y^2\}=(x-9)^2+y^2$$

より，$x^2+y^2=9$。

4 $y=-x^2+9$ と x 軸との交点の x 座標は，$x=\pm 3$ である。よって，

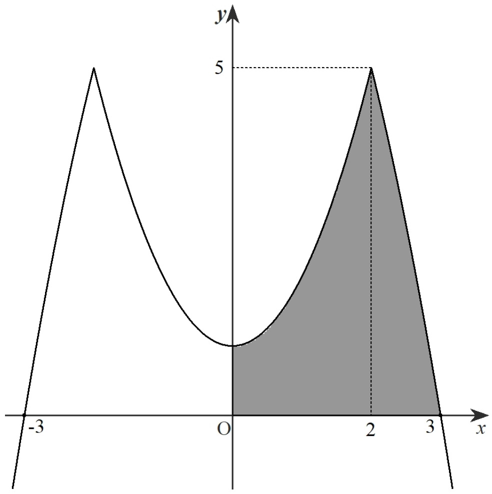
$$S_1=\int_{-3}^{3}\{(-x^2+9)-0\}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\{3-(-3)\}^3=36$$

となる。

$y=5-|x^2-4|$ のグラフは y 軸対称なので，$x \geqq 0$ の部分と x 軸で囲まれる部分の面積を考え，最後に 2 倍すればよい。

$$5-|x^2-4|=\begin{cases} x^2+1 & (0 \leqq x \leqq 2 \text{ のとき}) \\ -x^2+9 & (2 \leqq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

より，グラフの概形は次図のようになる。



よって，

$$S_2 = 2\left\{\int_0^2 \{(x^2+1)-0\}\ \mathrm{d}x + \int_2^3 \{(-x^2+9)-0\}\ \mathrm{d}x\right\} = \frac{44}{3}$$

となる。

5　真数条件 $x+2>0$ の下で，

$$\log_3(x-2) = 2\log_9(x-2) = \log_3(x-2)^2$$

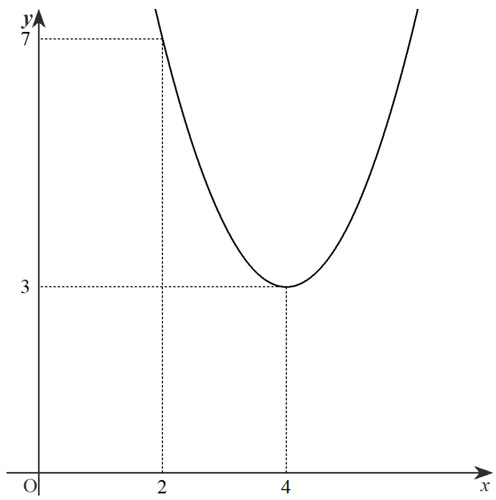
より，

$$\log_3(x-2) = \log_9(2x^2-12x-a+23) \iff \begin{cases} x-2>0, \\ x^2-8x+19=a \end{cases}$$

となる。$a=5$ のとき，

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x^2-8x+14=0 \end{cases}$$

なので，これを解くと $x=4\pm\sqrt{2}$ となる。また，方程式 $\log_3(x-2)=\log_9(2x^2-12x-a+23)$ が相異なる 2 つの実数解をもつのは，方程式 $x^2-8x+19=a$ が $x>2$ の範囲に相異なる 2 つの実数解をもつとき，かつその時に限る。よって，$3<a<7$ である。



$\boxed{6}$ $x = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},\ y = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ より，$x = 5+2\sqrt{6},\ y = 5-2\sqrt{6}$ なので，

$$x+y = 10,\ xy = 1$$

である。よって，

$$x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy = 98,$$

$$x^3+y^3 = (x+y)^3-3xy(x+y) = 970$$

なので，

$$\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3} = \frac{485}{49}$$

である。また，

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3 = (x^2+y^2)(x+y) = 980$$

である。

$\boxed{7}$ 2 の倍数となるのは 1 の位が 2 または 4 のとき，かつその時に限るので，

$2\times4\times3\times2 = 48$ 個

である。また，3 の倍数となるのは，各位の和が 3 の倍数となるとき，かつその時に限る。さらに，各位の和が 3 の倍数となるのは，3 以外の数字を用いられているとき，かつその時に限る。よって，

$4! = 24$ 個

である。

$\boxed{8}$ θ は第 1 象限の角なので，

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

である。また，$\dfrac{\theta}{2}$ も第 1 象限の角なので，

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

である。また，$\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$ なので，加法定理より，

$$\sin\frac{3}{2}\theta = \sin\theta\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{18}$$

となる。

$\boxed{9}$ $2^n = 10^{n\log 2}$ より，

$$\begin{aligned} 2^n \text{ が } 202 \text{ けたの整数となる} &\iff 10^{201} \leqq 2^n < 10^{202} \\ &\iff 201 \leqq n\log_{10}2 < 202 \end{aligned}$$

より，2^n が 202 けたの整数となるような自然数 n の最大値は 671 である。また，

$$2^{671} = 10^{671\log_{10}2} = 10^{0.971}\times10^{201}$$

であり，$9 = 10^{2\log_{10}3} = 10^{0.9542}$ より，$9 < 10^{0.971} < 10$ である。よって，2^{671} の最高位の数字は 9 である。

10 $(1-x^2)^6(1-x^3)^4$ の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_m(-x^2)^m{}_4\mathrm{C}_n(-x^3)^n = (-1)^{m+n}\cdot{}_6\mathrm{C}_m\cdot{}_4\mathrm{C}_n\cdot x^{2m+3n} \quad (m, n \text{ は整数で，} 0 \leqq m \leqq 6,\ 0 \leqq n \leqq 4)$$

である。x^2 の項は $2m+3n=2$ より $(m,n)=(1,0)$ で，その係数は

$$(-1)^{1+0}\cdot{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_0 = -6$$

である。また，x^{12} の項は $2m+3n=12$ より $(m,n)=(6,0),(3,2),(0,4)$ で，その係数は

$$(-1)^{6+0}\cdot{}_6\mathrm{C}_6\cdot{}_4\mathrm{C}_0+(-1)^{3+2}\cdot{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_2+(-1)^{0+4}\cdot{}_6\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_4=-118$$

である。

11 得点が 6 点となるのは，出た目の組み合わせが

$$\begin{cases}(6) & (n=1 \text{ のとき}) \\ (1,5),(2,4),(3,3) & (n=2 \text{ のとき}) \\ (1,1,4),(1,2,3),(2,2,2) & (n=3 \text{ のとき})\end{cases}$$

の時，かつその時に限るので，得点が 6 点となる確率は

$$\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2\times2!+1\times1!}{6^2}+\frac{1}{6}\times\frac{\frac{3!}{2!1!}+3!+1}{6^3}=\frac{89}{648}$$

である。また，得点が 5 点未満（4 点以下）となるのは，出た目の組み合わせが

$$\begin{cases}(1),(2),(3),(4) & (n=1 \text{ のとき}) \\ (1,1),(1,2),(1,3),(2,2) & (n=2 \text{ のとき}) \\ (1,1,1),(1,1,2) & (n=3 \text{ のとき})\end{cases}$$

の時，かつその時に限るので，得点が 5 点未満となる確率は

$$\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2\times2!+2\times1!}{6^2}+\frac{1}{6}\times\frac{\frac{3!}{2!1!}+1}{6^3}=\frac{127}{324}$$

である。よって，得点が 5 点以上である確率は

$$1-\frac{127}{324}=\frac{197}{324}$$

である。

12 $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\cos\angle\mathrm{ABC}=24$$

より，$\mathrm{AC}>0$ なので $\mathrm{AC}=2\sqrt{6}$ である。また，$0^\circ<\angle\mathrm{ABC}<180^\circ$ ゆえ $\sin\angle\mathrm{ABC}>0$ なので，

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

である。よって，$\triangle$ABC の外接円の半径の長さを R とすると，$\triangle$ABC に正弦定理を適用することで，

$$R=\frac{\mathrm{AC}}{2\sin\angle\mathrm{ABC}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

となる。また，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}=2\sqrt{15}$$

である。

⑬ $2^x+5^y=2\sqrt{10}$ より，

$$(2^x+5^y)^2=4^x+2\cdot 2^x\cdot 5^y+25^y=4^x+25^y+20=40$$

より，$4^x+25^y=20$ である。また，$2^x=10^{x\log_{10}2}$，$\sqrt{10}=10^{\frac{1}{2}}$ より $\dfrac{1}{x}=2\log_{10}2$ である。同様に，$\dfrac{1}{y}=2\log_{10}5$ なので，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$$

となる。

⑭ 2 次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフは軸に関して対称なので，

$$-\frac{a}{2}=2 \quad \therefore\ a=-4$$

である。また，

$$y=x^2-4x+b=(x-2)^2+b-4$$

の頂点は $(2,b-4)$ であり，これが $y=3x-1$ 上にあるので，

$$b-4=3\cdot 2-1 \quad \therefore\ b=9$$

となる。

⑮ $t=3^x-3^{-x}$ より，$t^2=9^x+9^{-x}-2$ なので，

$$\begin{aligned}y&=9^x+9^{-x}+3^x-3^{-x}+7\\&=(9^x+9^{-x}-2)+(3^x-3^{-x})+9\\&=t^2+t+9\end{aligned}$$

である。また，

$$\begin{aligned}y&=t^2+t+9\\&=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{35}{4}\end{aligned}$$

であり，

$$t=-\frac{1}{2} \iff 3^x-3^{-x}=-\frac{1}{2} \iff (3^x)^2+\frac{3^x}{2}-1=0 \iff 3^x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

なので，y は $x=\log_3\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ で最小値 $\dfrac{35}{4}$ をとる。

⑯ まず，

$$x+ty-t-2=0 \iff (y-1)t+(x-2)=0$$

より，直線 l は t の値によらず $(2,1)$ を通る。また，

l が円 $x^2+y^2=1$ と接する

$\iff$ 円 $x^2+y^2=1$ の中心と直線 l の距離が，円 $x^2+y^2=1$ の半径の長さに等しい

なので，求める t の値は，

$$\frac{|-t-2|}{\sqrt{1+t^2}}=1 \quad \therefore\ t=-\frac{3}{4}$$

である。

⑰ 三角形の頂点を，

$$\mathrm{AB}=13,\ \mathrm{BC}=14,\ \mathrm{CA}=15$$

となるようにとる。余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{BCA}=\frac{14^2+15^2-13^2}{2\cdot14\cdot15}=\frac{3}{5}$$

である。また，$0^\circ<\angle\mathrm{BCA}<180^\circ$ ゆえ $\sin\angle\mathrm{BCA}>0$ なので，

$$\sin\angle\mathrm{BCA}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BCA}}=\frac{4}{5}$$

である。外接円の半径の長さを R とすると，正弦定理より，

$$R=\frac{\mathrm{AB}}{2\sin\angle\mathrm{BCA}}=\frac{65}{8}$$

である。また，内接円の半径の長さを r とすると，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積について，

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\cdot\sin\angle\mathrm{BCA}=\frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$$
$$\therefore\ r=4$$

である。

⑱ $\triangle\mathrm{BAD}$，$\triangle\mathrm{BCD}$ について，余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{BAD}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-\mathrm{BD}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}=\frac{13-\mathrm{BD}^2}{12},$$
$$\cos\angle\mathrm{BCD}=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2-\mathrm{BD}^2}{2\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BD}}=\frac{25-\mathrm{BD}^2}{24}$$

である。$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=180^\circ$ より $\cos\angle\mathrm{BAD}=-\cos\angle\mathrm{BCD}$ なので，

$$\frac{13-\mathrm{BD}^2}{12}=-\frac{25-\mathrm{BD}^2}{24}$$

であり，これを解くと，$\mathrm{BD}=\sqrt{17}$ である（$\because$ $\mathrm{BD}>0$）。また，

$$\cos\angle\mathrm{BAD}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-\mathrm{BD}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}=\frac{13-\mathrm{BD}^2}{12}=\frac{13-17}{12}=-\frac{1}{3}$$

である。

⑲ $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$ より，

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2=3$$

なので，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$ である。また，

$$|t\vec{a}+\vec{b}|^2=t^2|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4t^2-10t+9=4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{11}{4}$$

なので，$t=\dfrac{5}{4}$ で $|t\vec{a}+\vec{b}|$ は最小値 $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ をとる。

20 真数条件より，$x>0$ である。両辺の対数をとると，

$$(\log_3 x)^2 = \log_3 x + \log_3 729 = 6 + \log_3 x$$

なので，$\log_3 x = -2, 3$ となる。よって，$x^{\log_3 x} = 729x$ の解は $x = \dfrac{1}{9}, 27$ である。

A (1) $f(-1)=0$ だから $f(x)$ は $x=-1$ を解にもつ。また，因数定理より $f(x)$ は $x+1$ で割り切れる。実際

$$f(x) = (x+1)(x^2+ax+2)$$

である。

(2) $g(x) = x^2+ax+2$ とおく。$f(x)=0$ が $x=-1$ 以外の実数解を持たない条件は

(i) $g(x)=0$ が $x=-1$ 以外の実数解を持たない

(ii) $g(x)=0$ が実数解を持たない

のいずれかが成り立つことである。

(i)について $g(-1)=0$ より $a=3$ であるが，このとき

$$g(x) = x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$$

より $g(x)=0$ は $x=-2$ も解にもつから不適。

(ii)について $g(x)=0$ の判別式を D とすれば

$$D = a^2-8<0$$

より，これを解いて $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$ である。

以上より求める a の値の範囲は $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$ である。

(3) $f(x)=0$ の実数解のうち，値が最小であるものが -1 である条件は

(a) $g(x)=0$ が $x=-1$ 以外の実数解を持たない

(b) $g(x)=0$ が実数解を持つが，その解が -1 以上

のいずれかが成り立つことである。

(2)より

$$\text{(a)} \iff -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$$

である。

(b)について次の 3 条件が成り立つことと同値である。

(c) $D \geqq 0$

(d) $f(-1) \geqq 0$

(e) $-\dfrac{a}{2} \geqq -1$:（$y=g(x)$ の軸の条件）

また，

$$\text{(c)} \iff a \leqq -2\sqrt{2},\ a \geqq 2\sqrt{2},$$

$$\text{(d)} \iff a \leqq 3,$$

$$\text{(e)} \iff a \leqq 2$$

である。よって

$$(\mathrm{b}) \iff a \leqq -2\sqrt{2}$$

である。

以上より求める a の値の範囲は $a < 2\sqrt{2}$ である。

$\boxed{\mathrm{B}}$ 実数係数の方程式がある虚数解をもつとき，その共役な虚数も解にもつ。したがって

$$x^3 + ax^2 - 5x + b = 0$$

は $\alpha = 2 - \sqrt{3}i$ に加えて $\beta = 2 + \sqrt{3}i$ を解にもつ。もう 1 つの解を γ とすると，

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -5 & \cdots\cdots ② \\ \alpha\beta\gamma = -b & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ。②から $\gamma = -3$ であるから，①および③から $a = -1$，$b = 21$ である。

$\boxed{\mathrm{C}}$
$$\begin{aligned} 2f(\theta) &= 2 \cdot (\cos^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 2(\cos 2\theta + 1) + \sin 2\theta \\ &= \sqrt{5}\sin(2\theta + \alpha) + 2 \end{aligned}$$

ただし α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ をみたすものである。よって，$\alpha \leqq 2\theta + \alpha \leqq \pi + \alpha$ だから，$f(\theta)$ は $2\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{5}}{2} + 1$ をとる。このとき $\theta = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}$ について

$$\begin{aligned} \sin^2\theta &= \frac{1}{2}\left\{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \sin\alpha) \\ &= \frac{5 - 2\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

となる。$\sin\theta > 0$ であるから $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{5 - 2\sqrt{5}}{10}}$ である。

$\boxed{\mathrm{D}}$ 真数条件から $x + 1 > 0$ かつ $4 - x > 0$，つまり $-1 < x < 4$ である。

不等式の左辺は

$$\begin{aligned} \log_4(x+1) + \log_2(4-x) &= \log_4(x+1) + 2\log_4(4-x) \\ &= \log_4(x+1)(4-x)^2 \end{aligned}$$

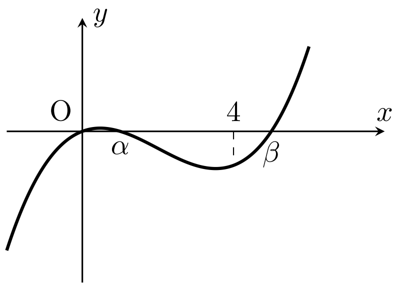
である。右辺は $\log_4 16$ と等しく，両辺の対数の底は 1 より大きいから，

$$(\text{もとの不等式}) \iff \begin{cases} -1 < x < 4, \\ (x+1)(4-x)^2 \geqq 16 \end{cases}$$

である。不等式 $(x+1)(4-x)^2 \geqq 16$ を変形すると

$$x(x^2 - 7x + 8) \geqq 0$$

である。$\alpha = \dfrac{7-\sqrt{17}}{2}$，$\beta = \dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$ はいずれも $x^2-7x+8=0$ の解である。したがって $y=x(x^2-7x+8)$ のグラフは下図のようになる。



ゆえに，求める不等式の解は

$$0 \leqq x \leqq \frac{7-\sqrt{17}}{2}$$

である。

E (1) $\dfrac{1}{2} = 4^{-\frac{1}{2}}$ だから $\log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{x}{\log_4 \dfrac{1}{2}} = -2\log_4 x$ である。よって

$$y = (-2t)^3 + 3t = -8t^3 + 3t$$

である。

(2) $x \geqq 1$ のとき，$t \geqq 0$ である。この範囲で $y = -8t^3 + 3t$ の最大値を求める。

$$y' = -24y^2 + 3 = -3(8t^2 - 1)$$

だから，$0 < t < \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ で $f'(t) > 0$ であり，$t > \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ で $f'(t) < 0$ である。

ゆえに $t \geqq 0$ において $f(x)$ は $t = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ で最大値 $-8\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^3 + 3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。

また，$t = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき，$x = 4^{t_0}$ $\left(t_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ である。

F (1) 1 回目と 2 回目に出た目をそれぞれ a, b とするとき

$$a+b=9,\ 1 \leqq a \leqq 6,\ 1 \leqq b \leqq 6$$

を満たす組 (a, b) をすべて求めると

$$(a,b) = (3,9), (4,5), (5,4), (6,3)$$

であるから，$P(2) = \dfrac{4}{6^2} = \dfrac{1}{9}$ である。

(2) 1 回目，2 回目，3 回目に出た目をそれぞれ a, b, c とするとき

$$a+b+c=9,\ 1 \leqq a \leqq 6,\ 1 \leqq b \leqq 6,\ 1 \leqq c \leqq 6 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす組 (a, b, c) をすべて求める。下の表で，各組 (a, b) に対して①を満たす c の値を 2 重線内に書いた。ただし，存在しない場合は「×」と書いてある。

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	$\times$	6	5	4	3	2
2	6	5	4	3	2	1
3	5	4	3	2	1	$\times$
4	4	3	2	1	$\times$	$\times$
5	3	2	1	$\times$	$\times$	$\times$
6	2	1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

したがって①を満たす組 (a, b, c) の個数は 25 個で，$P(3) = \dfrac{25}{6^3} = \dfrac{25}{216}$ である。

(3) m 回目に出た目を a_m とするとき

$$\sum_{m=1}^{6} a_m = 9,\ 1 \leqq a_m \leqq 6 \quad (1 \leqq m \leqq 6)$$

を満たす組 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ の組の個数は，9 個の○を 1 列に並べたときの異なる 8 つの間から 5 個選ぶ総数 ${}_8\mathrm{C}_5$ に等しい。よって $P(6) = \dfrac{{}_8\mathrm{C}_5}{6^6} = \dfrac{7}{5832}$ である。

$\boxed{\mathrm{G}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ について

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \quad \cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ。まず

$$② \iff -2a + 12 = 0 \iff a = 6$$

である。このとき $b > 0$ のもとで

$$① \iff |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \iff 36 + 9 = 4 + b^2 + 16 \iff b = 5$$

である。したがって $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (6, 0, 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (-2, 5, 4)$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (4, 5, 7)$$

となる。

(2) 条件を満たす球の中心を X とし，X から平面 OAB に下ろした垂線の足を Y とする。このとき X と 4 点 O，A，B，C の距離はすべて 6 で等しく，三平方の定理を考えれば Y と 4 点 O，A，B，C の距離もすべて等しいので，Y は正方形 OACB の 2 つの対角線が交わった点で

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left(2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

である。さて，$\overrightarrow{n} = (1, 2, -2)$ とすると $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ だから，$\overrightarrow{n}$ は平面 OAB の法線ベクトルである。$\overrightarrow{\mathrm{YX}}$ は $\overrightarrow{n}$ に平行であり，その長さ $\overline{\mathrm{YX}}$ は，直角三角形 OXY に三平方の定理を用いて

$$\overline{\mathrm{OX}}^2 = \overline{\mathrm{OY}}^2 + \overline{\mathrm{YX}}^2 \iff 36 = \frac{90}{4} + \overline{\mathrm{YX}}^2 \iff \overline{\mathrm{YX}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{YX}} = \pm\frac{3\sqrt{6}}{2}\frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|} = \left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}, \pm\sqrt{6}, \mp\sqrt{6}\right) \quad \text{（複号同順）}$$

である。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OY}} + \overrightarrow{\mathrm{YX}} = \left(2 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2} \pm \sqrt{6}, \frac{7}{2} \mp \sqrt{6}\right) \quad \text{（複号同順）}$$

となる。