

二次切替数学ドリル (数学III) の解答

1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi} \sin \frac{2\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi} \times \left(\frac{2\pi}{n} \times \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \right)$
 $= \underline{2}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{2n+1} \right)^n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \right)^n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \right)^{n+\frac{1}{2}}}$
 $= \underline{\frac{1}{e}}$

[2] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^6 + (2n+2)^6 + \dots + (2n)^6}{n^7}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(2n+k)^6}{n^7}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(2 + \frac{k}{n} \right)^6$
 $= \int_0^1 (2+x)^6 dx$
 $= \frac{1}{7} (3^7 - 2^7)$
 $= \underline{\frac{2059}{7}}$

[3](1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
 $\left(0 \leq \left| \frac{1 - \cos x}{x} \right| \leq \frac{2}{|x|} \text{ と } \frac{2}{|x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ より} \right)$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - 2x) \cos 3x}{\cos^2 x}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t \cos(3t + \frac{3\pi}{2})}{\cos^2(t + \frac{\pi}{2})} \quad \left(x - \frac{\pi}{2} = t \text{ とおいた} \right)$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t \sin 3t}{\sin^2 t}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2 \cancel{t} \times (3 \cancel{t} \times \frac{\sin 3t}{3t})}{\left(\cancel{t} \times \frac{\sin t}{t} \right)^2}$
 $= \frac{-2 \times (3 \times 1)}{1^2}$
 $= \underline{-6}$

[4] 2曲線 $y = \frac{1}{x}$, $y = a x (1-x)^{2n}$ について, それぞれ
 $y' = -\frac{1}{x^2}$
 $y' = a(1-x)^{2n} + a x \cdot 2n(1-x)^{2n-1} \cdot (-1)$
 $= a(1-x)^{2n} \left(1 - \frac{2nx}{1-x} \right)$

共有点の x 座標を t とすると,

$\begin{cases} y \text{ が一致するから } \frac{1}{t} = a t (1-t)^{2n} & \dots\dots ① \\ y' \text{ が一致するから } -\frac{1}{t^2} = a(1-t)^{2n} \left(1 - \frac{2nt}{1-t} \right) & \dots\dots ② \end{cases}$

(1) ①より, $a = \frac{1}{t^2(1-t)^{2n}} \dots\dots ③$

②に代入して

$-\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2(1-t)^{2n}} \cdot (1-t)^{2n} \left(1 - \frac{2nt}{1-t} \right)$

$\therefore -1 = 1 - \frac{2nt}{1-t}$

$\therefore \frac{2nt}{1-t} = 2$

$\therefore nt = 1-t$

$\therefore t = \frac{1}{n+1}$

③に代入して

$a = \frac{1}{\left(\frac{1}{n+1} \right)^2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n}}$
 $= (n+1)^2 \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n}}{n^2}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n}$
 $= 1 \cdot e^2$
 $= \underline{e^2}$

[5] $x = \sin t$ より, $\frac{dx}{dt} = \cos t \dots\dots ①$

$y = 2^t$ より, $\frac{dy}{dt} = (\log 2) \cdot 2^t \dots\dots ②$

①, ②より

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$
 $= \frac{(\log 2) \cdot 2^t}{\cos t}$

さらに,

$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{(\log 2)^2 \cdot 2^t \cdot \cos t - (\log 2) \cdot 2^t \cdot (-\sin t)}{\cos^2 t}$
 $= \frac{(\log 2) \cdot 2^t}{\cos t} \cdot (\log 2 + \tan t) \dots\dots ③$

①, ③より

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$
 $= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}$
 $= \frac{(\log 2) \cdot 2^t}{\cos t} \cdot (\log 2 + \tan t)$
 $= \frac{\log 2 \cdot (\log 2 + \tan t) \cdot 2^x}{\cos^2 t}$

[6] $C: x = 3\cos\theta, y = 2\sin\theta$ について

$$\frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta, \frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta$$

したがって、点 $(3\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ における C の方向ベクトルは $\theta = \alpha$ とし、

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta} \right) = (-3\sin\alpha, 2\cos\alpha)$$

と表せる。

求める法線は

点 $(3\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ を通り、 \vec{v} を法線ベクトルにもつ直線

だから、その方程式は

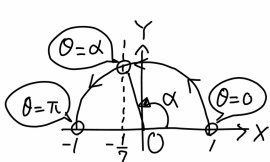
$$-3\sin\alpha(x - 3\cos\alpha) + 2\cos\alpha(y - 2\sin\alpha) = 0$$

$$\therefore (-3\sin\alpha)x + (2\cos\alpha)y + 5\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

[7] $f(\theta) = \frac{4\sin\theta}{7 + \cos\theta}$ ($0 < \theta < \pi$) について

$$f'(\theta) = 4 \times \frac{\cos\theta(7 + \cos\theta) - \sin\theta(-\sin\theta)}{(7 + \cos\theta)^2}$$

$$= \frac{4}{(7 + \cos\theta)^2} \times (7\cos\theta + 1)$$



この部分の正負を
左図より判断して
次の増減表を得る。

θ	0	\dots	α	\dots	π
$f'(\theta)$			$+$		$-$
$f(\theta)$			\nearrow		\searrow

表より、 $f(\theta)$ は $\theta = \alpha$ のとき最大。

ただし、 α は $0 < \alpha < \pi$ から $\cos\alpha = -\frac{1}{7}$ で定めた。

$$\sin\alpha = +\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

よって、

$$\begin{aligned} (f(\theta) \text{ の最大値}) &= f(\alpha) \\ &= \frac{4\sin\alpha}{7 + \cos\alpha} \\ &= \frac{4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7}}{7 + \left(-\frac{1}{7}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

[8] $f(t) = \frac{(t^2 - 2t + \frac{25}{2})^5}{t^2 + 1}$ について

$$f'(t) = \frac{5(t^2 - 2t + \frac{25}{2})^4(2t - 2) \cdot (t^2 + 1) - (t^2 - 2t + \frac{25}{2})^5 \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(t^2 - 2t + \frac{25}{2})^4}{(t^2 + 1)^2} \{10(t-1)(t^2+1) - 2t(t^2 - 2t + \frac{25}{2})\}$$

$$= \frac{(t^2 - 2t + \frac{25}{2})^4}{(t^2 + 1)^2} (8t^3 - 6t^2 - 15t - 10)$$

$$= \frac{(t^2 - 2t + \frac{25}{2})^4}{(t^2 + 1)^2} (t-2)(8t^2 - 10t + 5)$$

$$= \frac{(t^2 - 2t + \frac{25}{2})^4}{(t^2 + 1)^2} \left\{ 8\left(t - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{15}{8} \right\} \times (t-2)$$

t	$(-\infty)$	\dots	2	\dots	(∞)
$f'(t)$			$-$		$+$
$f(t)$			\searrow		\nearrow

表より、 $f(t)$ が最小となる t は $t = 2$

[9] $f(x) = x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$
 $= \sqrt{4\pi^2 x^4 - x^6}$

において、 $x^2 = t$ とおき、 $\sqrt{\quad}$ の中身を $g(t)$ とおくと

$$g(t) = 4\pi^2 t^2 - t^3 \quad (t \geq 0)$$

$$g'(t) = 8\pi^2 t - 3t^2$$

$$= 3t\left(\frac{8\pi^2}{3} - t\right)$$

t	0	\dots	$\frac{8\pi^2}{3}$	\dots	(∞)
$g'(t)$			$+$		$-$
$g(t)$			\nearrow		\searrow

$f(x)$ が最大となるのは $g(t)$ が最大するときであり、

表よりそれは $t = \frac{8\pi^2}{3}$ のときである。

よって、

$$\begin{aligned} (f(x) \text{ の最大値}) &= \sqrt{g\left(\frac{8\pi^2}{3}\right)} \\ &= \sqrt{4\pi^2 \left(\frac{8\pi^2}{3}\right)^2 - \left(\frac{8\pi^2}{3}\right)^3} \\ &= \frac{8\pi^2}{3} \sqrt{4\pi^2 - \frac{8\pi^2}{3}} \\ &= \frac{16}{3\sqrt{3}} \pi^3 \end{aligned}$$

[10](1) i $\left\{ \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right\}' = \frac{1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

ii $\left\{ x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right\}'$
 $= 1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 $= \frac{x^2 + 1 + x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 $= \frac{2(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 $= 2\sqrt{x^2 + 1}$

(2) i (1)の(ii)より

$$\frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right\} \xrightarrow{\text{微分}} \sqrt{x^2 + 1}$$

よって、

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right\} + C$$

(C は積分定数)

ii (1)の(i)より

$$\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \xrightarrow{\text{微分}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

よって、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

(C は積分定数)

[11](1) $\int \tan x \, dx = -\int \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \, dx$
 $= -\log |\cos x| + C$
 (Cは積分定数)

(2) $\int \tan^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \, dx$
 $= \tan x - x + C$
 (Cは積分定数)

(3) $\int \tan^3 x \, dx = \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \, dx$
 $= \int \left(\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan x \right) \, dx$
 (a) を用いる
 $= \frac{1}{2} \tan^2 x + \log |\cos x| + C$
 (Cは積分定数)

[12] $\int_1^2 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2} \, dx$
 $= \int_1^2 \left(x + 2 + \frac{2x - 4}{x^2 - 2x + 2} \right) \, dx$
 $= \int_1^2 \left\{ x + 2 + \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} - \frac{2}{(x-1)^2 + 1} \right\} \, dx$
 $\left(x-1 = \tan \theta, \frac{x-1}{0} \rightarrow \frac{2}{\frac{\pi}{4}} \right)$
 (により) 変数を変換する.
 $dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$
 $= \left[\frac{1}{2} x^2 + 2x + \log |x^2 - 2x + 2| \right]_1^2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$
 $= \frac{7}{2} + \log 2 - \frac{\pi}{2}$

[13] $f(x) = \int_0^1 t |x-2t| \, dt$ について

(ア) $x \leq 0$ である x に対しては
 $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow |x-2t| = x-2t \leq 0$ なる t
 $f(x) = \int_0^1 t(2t-x) \, dt$
 $= \int_0^1 (2t^2 - xt) \, dt$
 $= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x$

(イ) $0 < x < 2$ である x に対しては
 $0 \leq t \leq \frac{x}{2}$ において $x-2t \geq 0$
 $\frac{x}{2} \leq t \leq 1$ において $x-2t \leq 0$ なる t
 $f(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} t(x-2t) \, dt + \int_{\frac{x}{2}}^1 t(2t-x) \, dt$
 $= \int_0^{\frac{x}{2}} (xt - 2t^2) \, dt + \int_{\frac{x}{2}}^1 (2t^2 - xt) \, dt$
 $= \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{x}{2} \right)^3 \right] - \frac{x}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2 \right]$
 $= \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{2} x + \frac{2}{3}$

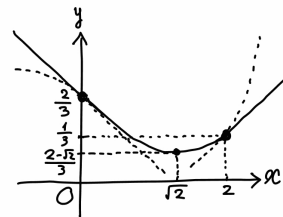
(ウ) $2 \leq x$ である x に対しては
 $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow |x-2t| = x-2t \geq 0$ なる t
 $f(x) = \int_0^1 t(x-2t) \, dt$
 $= \frac{1}{2} x - \frac{2}{3}$

こゝより,
 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x & (\text{if } x \leq 0) \\ \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} & (\text{if } 0 < x < 2) \\ \frac{1}{2}x - \frac{2}{3} & (\text{if } 2 \leq x) \end{cases}$

こゝで、 $0 < x < 2$ においては
 $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x^2 - 2)$

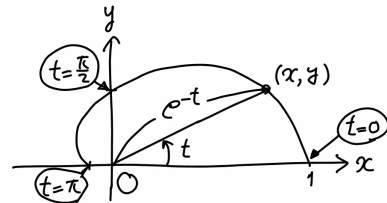
$x \parallel (0) \dots \sqrt{2} \dots (2)$
 $f'(x) \parallel - \quad +$
 $f(x) \parallel \left(\frac{2}{3} \right) \searrow \frac{2-\sqrt{2}}{3} \nearrow \left(\frac{1}{3} \right)$

よって、 $y = f(x)$ のグラフは次のとおり



[14] $\begin{cases} x = e^{-t} \cos t & (= x(t) \text{ とおく}) \\ y = e^{-t} \sin t & (= y(t) \text{ とおく}) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$

$(x, y) = e^{-t} (\cos t, \sin t)$ より、概形は次のとおり



$r = e^{-t}$ とおくと、 $(x, y) = r(\cos t, \sin t)$ であり、求める面積 S は

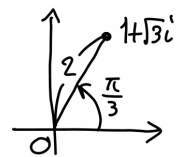
$$S = \int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-2t} \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{1 - e^{-2\pi}}{4}$$

[15] $(1 + \sqrt{3}i)^{10}$
 $= \left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right\}^{10}$
 $= 2^{10} \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3} \right)$
 $= 2^{10} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$
 $= -512 - 512\sqrt{3}i$



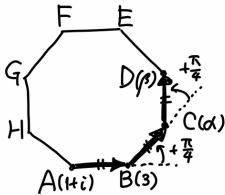
【16】(解1) $z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと
 $(x + yi)^3 = i$
 $\therefore x(x^2 - 3y^2) + i(3x^2y - y^3) = i$
 両辺の実部, 虚部をそれぞれ比較して

$$\begin{cases} x(x^2 - 3y^2) = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

 $\therefore \begin{cases} x = 0 \\ -y^3 = 1 \end{cases}$ または $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3}y \\ y^3 = \frac{1}{8} \end{cases}$
 y は実数であることに注意して解くと
 $(x, y) = (0, -1), (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
 よって,
 $z = -i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

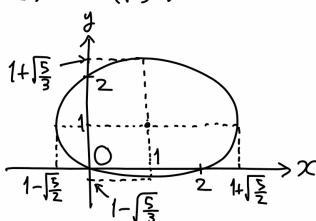
(解2) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと
 $\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^3 = i$
 $\therefore r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2})$
 両辺の絶対値と偏角を比較して
 $r^3 = 1, 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n は整数)
 $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ に注意して解くと
 $r = 1, \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
 よって,
 $z = 1(\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6}), 1(\cos \frac{5\pi}{6} + i\sin \frac{5\pi}{6}), 1(\cos \frac{3\pi}{2} + i\sin \frac{3\pi}{2})$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i$

【17】複素数平面で考える。

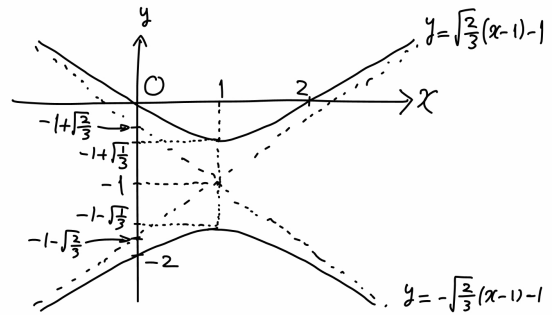


\vec{BC} は \vec{AB} を $+\frac{\pi}{4}$ だけ回転したものであるから
 C を表す複素数を α とおくと
 $\alpha - 3 = (3 - (1+i)) \times 1(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4})$
 $\therefore \alpha = 3 + (2-i)(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$
 $= 3 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
 よって, $C(3 + \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
 \vec{CD} は \vec{AB} を $+\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものであるから
 D を表す複素数を β とおくと
 $\beta - \alpha = (3 - (1+i)) \times 1(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2})$
 $\therefore \beta = \alpha + (2-i)i$
 $= 4 + \frac{3}{\sqrt{2}} + (2 + \frac{1}{\sqrt{2}})i$
 よって, $D(4 + \frac{3}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}})$

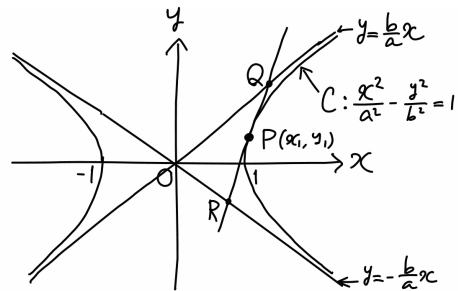
【18】(1) $2x^2 + 3y^2 - 4x - 6y = 0$
 $\therefore 2(x-1)^2 + 3(y-1)^2 = 5$
 $\therefore \frac{(x-1)^2}{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2} + \frac{(y-1)^2}{(\frac{\sqrt{5}}{3})^2} = 1$ (楕円)



(2) $2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y = 0$
 $\therefore 2(x-1)^2 - 3(y+1)^2 = -1$ (双曲線)
 $(\sqrt{2}(x-1) - \sqrt{3}(y+1))(\sqrt{2}(x-1) + \sqrt{3}(y+1)) = -1$



【19】



(1) P における接線の方程式 $\frac{x_1}{a^2}x - \frac{y_1}{b^2}y = 1$ と
 漸近線の式 $y = \pm \frac{b}{a}x$ (以下, 符号同順) を連立させると

$$\begin{cases} y = \pm \frac{b}{a}x & \dots\dots\dots ① \\ (\frac{x_1}{a^2} \mp \frac{y_1}{b^2})x = 1 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

$\therefore P \in C$ より

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore (\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b})(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}) = 1 \dots\dots ③$$

②の両辺に $a(\frac{x_1}{a} \pm \frac{y_1}{b})$ をかけると③を用いると

$$x = a(\frac{x_1}{a} \pm \frac{y_1}{b})$$

①に代入して,

$$y = b(\pm \frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b})$$

よって, Q, R の座標は

$$(a(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}), b(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b})), (a(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}), -b(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}))$$

2) $\triangle OQR$ の面積

$$= \frac{1}{2} |(Q \text{ の } x \text{ 座標}) \times (R \text{ の } y \text{ 座標}) - (Q \text{ の } y \text{ 座標}) \times (R \text{ の } x \text{ 座標})|$$

$$= \frac{1}{2} |a(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}) \cdot \{-b(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b})\} - b(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}) \cdot a(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b})|$$

$$= \frac{1}{2} |-ab - ab| \text{ (③より)}$$

$$= ab \text{ (} a > 0, b > 0 \text{ より)}$$

これは $P(x_1, y_1)$ によらず一定である。