

二次切替数学ドリル (数学 III C)

【1】 n を自然数とする. 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^n$

【2】 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^6 + (2n+2)^6 + \cdots + (3n)^6}{n^7}$ を計算せよ.

【3】 x を実数とする. 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - 2x) \cos 3x}{\cos^2 x}$

【4】 n は自然数とする. xy 平面において 2 曲線 $y = \frac{1}{x}$, $y = ax(1-x)^{2n}$ はその共有点の 1 つにおいて共通の接線をもつ.

(1) a を n で表せ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n^2}$ を求めよ.

【5】 $x = \sin t$, $y = 2^t$ のとき, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ.

【6】 曲線 $C: x = 3 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ (θ は媒介変数) の点 $(3 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$ における法線の方程式を求めよ. (「傾き」を用いずに求めよ)

【7】 関数 $f(\theta) = \frac{4 \sin \theta}{7 + \cos \theta}$ ($0 < \theta < \pi$) の最大値を求めよ.

【8】 関数 $f(t) = \frac{\left(t^2 - 2t + \frac{25}{2}\right)^5}{t^2 + 1}$ が最小値をとるときの t の値を求めよ.

【9】 関数 $f(x) = x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$ の最大値を求めよ.

【10】 (1) 次の関数の導関数を求めよ.

i. $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

ii. $x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(2) 次の関数の原始関数を求めよ.

i. $\sqrt{x^2 + 1}$

ii. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

【11】 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \tan x dx$

(2) $\int \tan^2 x dx$

(3) $\int \tan^3 x dx$

【12】 定積分 $\int_1^2 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2} dx$ の値を求めよ.

【13】 関数 $f(x)$ を $f(x) = \int_0^1 t|x - 2t| dt$ で定めるとき, $y = f(x)$ のグラフを描け.

【14】 xy 平面上の曲線

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ.

【15】 $(1 + \sqrt{3}i)^{10}$ を計算せよ. ただし i は虚数単位である.

【16】 方程式 $z^3 = i$ を解け. ただし i は虚数単位である.

【17】 座標平面上で 8 点 A, B, C, D, E, F, G, H がこの順で反時計回りに並んで正 8 角形の頂点とし, A(1, 1), B(3, 0) であるとき, 点 C, D の座標を求めよ.

【18】 次の方程式で表される曲線を xy 平面に図示せよ.

(1) $2x^2 + 3y^2 - 4x - 6y = 0$

(2) $2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y = 0$

【19】 双曲線 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) について, C 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線が C の 2 つの漸近線と交わる点を Q, R とする.

(1) Q, R の座標を求めよ.

(2) 原点を O とするとき, 三角形 OQR の面積は P によらず一定であることを示し, その面積を求めよ.