

2024年

1 自然数 n に対して, 関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3} \quad (x \geq 0)$$

で定める. ただし, e は自然対数の底である.

- (1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は, ただ 1 つの実数解をもつことを示せ.
- (2) (1) における実数解を a_n とおくと, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ を求めよ.

(配点率 20 %)

2 α, β を複素数とし, 複素数 z に対して

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta$$

とおく. α, β は

$$|f(1) - 3| \leq 1 \quad \text{かつ} \quad |f(i) - 1| \leq 3$$

を満たしながら動く. ただし, i は虚数単位である.

- (1) $f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ.
- (2) $f(1+i) = 0$ であるとき, α, β の値を求めよ.

(配点率 20 %)

3 空間内の 2 直線 l, m はねじれの位置にあるとする. l と m の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ.

(配点率 20 %)

4 $a > 1$ とする. xy 平面において, 点 $(a, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする.

- (1) 円 C の $x \geq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y = 1, y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ.
- (2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする. (1) における V_1 について, $V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ.

(配点率 20 %)

5 自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ のうち, n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ とする.

- (1) 自然数 a, b, c および相異なる素数 p, q, r に対して, 等式

$$f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ.

- (2) $f(n)$ が n の約数となる 5 以上 100 以下の自然数 n をすべて求めよ.

(配点率 20 %)