

2024年

1

(30 点)

四面体 $OABC$ が次を満たすとする.

$$OA = OB = OC = 1, \angle COA = \angle COB = \angle ACB, \angle AOB = 90^\circ$$

このとき、四面体 $OABC$ の体積を求めよ.

2

(30 点)

n 個の異なる色を用意する. 立方体の各面にいずれかの色を塗る. 各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする. 辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする. 次の問いに答えよ.

(1) p_3 を求めよ.

(2) p_4 を求めよ.

3

(30 点)

a は正の定数とする. 次の関数の最大値を求めよ.

$$f(x) = \left| x^2 - \left(ax + \frac{3}{4}a^2 \right) \right| + ax + \frac{3}{4}a^2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

4

(30 点)

ある自然数と八進法, 九進法, 十進法でそれぞれ表したとき, 桁数がすべて同じになった. このような自然数で最大のものを求めよ. ただし, 必要なら次を用いてもよい.

$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011, \quad 0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$$

5

(30 点)

関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフの $x > 1$ の部分を C とする. このとき, 下の条件を満たすような正の実数 a, b について, 座標平面の点 (a, b) が動く領域の面積を求めよ.

「 C と直線 $y = ax + b$ は二つの異なる共有点を持つ.」