京大理系学部　入試問題

# 2024年

## 1

(30 点)

$n$ 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を $p_n$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $p_4$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

## 2

(30 点)

$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 $x$ と，$|y-(8+6i)|=3$ を満たす複素数 $y$ に対して，$z=\dfrac{x+y}{2}$ とする．このような複素数 $z$ が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ．

## 3

(30 点)

座標空間の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．線分 OA の中点を P，線分 AB の中点を Q とする．実数 $x$，$y$ に対して，直線 OC 上の点 X と，直線 BC 上の点 Y を次のように定める．

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=x\overrightarrow{\mathrm{OC}},\qquad \overrightarrow{\mathrm{BY}}=y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための $x$，$y$ に関する必要十分条件を求めよ．

## 4

(30 点)

与えられた自然数 $a_0$ に対して，自然数からなる数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ を次のように定める．

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき})\\[2mm] \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n \text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

次の問いに答えよ．

(1) $a_0, a_1, a_2, a_3$ がすべて奇数であるような最小の自然数 $a_0$ を求めよ．

(2) $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ がすべて奇数であるような最小の自然数 $a_0$ を求めよ．

## 5

(40 点)

$a$ は $a \geqq 1$ を満たす定数とする．座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を $D_a$ とする．

$$x \geqq 0\ ,\quad \frac{e^x-e^{-x}}{2} \leqq y\ ,\quad y \leqq \frac{e^x+e^{-x}}{2}\ ,\quad y \leqq a$$

次の問いに答えよ．

(1) $D_a$ の面積 $S_a$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_a$ を求めよ．

## 6

(40 点)

自然数 $k$ に対して，$a_k=2^{\sqrt{k}}$ とする．$n$ を自然数とし，$a_k$ の整数部分が $n$ 桁であるような $k$ の個数を $N_n$ とする．また，$a_k$ の整数部分が $n$ 桁であり，その最高位の数字が 1 であるような $k$ の個数を $L_n$ とする．次を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}$$

ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高位の数字は 2 である．