神大理系学部　入試問題

2024年

1. c を正の実数とする。各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。a_1 は関数

$$y = x + \sqrt{c - x^2} \quad (0 \leqq x \leqq \sqrt{c})$$

が最大値をとるときの x の値とする。a_{n+1} は関数

$$y = x + \sqrt{a_n - x^2} \quad (0 \leqq x \leqq \sqrt{a_n})$$

が最大値をとるときの x の値とする。数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_2 a_n$ で定める。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) a_1 を c を用いて表せ。

(2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を n と c を用いて表せ。

2. a，b，c は実数で，$a \neq 0$ とする。放物線 C と直線 l_1，l_2 をそれぞれ

$$C : y = ax^2 + bx + c$$
$$l_1 : y = -3x + 3$$
$$l_2 : y = x + 3$$

で定める。l_1，l_2 がともに C に接するとき，以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) b を求めよ．また c を a を用いて表せ。

(2) C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$\dfrac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) C と l_1 の接点を P，C と l_2 の接点を Q，放物線 C の頂点を R とする。a が (2) の条件を満たしながら動くとき，△PQR の重心 G の軌跡を求めよ。

3. n を自然数とする。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) 1 個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n を小さい順に 3 つ求めよ。

(2) 1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$ であるような n を小さい順に 3 つ求めよ。

(3) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の積が 160 の約数となる確率を求めよ。

4. 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形 ABCD を底面にもち，高さが 1 である直方体 ABCD − EFGH を，頂点の座標がそれぞれ

A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(−1, 0, 0)，D(0, −1, 0)，

E(1, 0, 1)，F(0, 1, 1)，G(−1, 0, 1)，H(0, −1, 1)

になるように xyz 空間におく。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) 直方体 ABCD − EFGH を直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体を X_1 とし，また直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体を X_2 とする。X_1 の体積 V_1 と X_2 の体積 V_2 を求めよ。

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ とする。平面 $x = t$ と線分 EF の共有点の座標を求めよ。

(3) 直方体 ABCD − EFGH を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を X_3 とする。X_3 の体積 V_3 を求めよ。

5. 0 以上の実数 x に対して，

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+u^2}\,du$$

と定める。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 α に対して，$f(\tan\alpha)$ を求めよ。

(2) xy 平面上で，次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad f(x) + f(y) \leqq f(1)$$

またその領域の面積を求めよ．